數學論證的判讀歷程及其教學設計

葉明達[1] 林冠群[2] 陳彥廷[3]

[1]高雄市立新莊高中[2]輔英科技大學科教中心[3]中華醫事科技大學幼保系

（投稿日期：96 年8 月28 日；修正日期：96 年9 月24 日、10 月25 日；接受日期：96 年10 月30 日）

摘要

在教育改革的浪潮下，中學教育不但在課程上有所革新，一些創新的教學目標也不斷被提出。例如，美國數學教師協會也大力倡導「數學論證的理解與評價」。研究者認爲在「論證判讀」活動中，學生能將自己的「數學論證」與經過社會建構之後的「數學證明」兩相比較，經由相互磋商，判定何者爲有效的數學證明，讓學生反省自己思維轉折的歷程。因此，將「論證判讀」應用到課堂中，應該是適切的。本文先探討「論證判讀」教學理念的起源，繼而介紹論證判讀的思維歷程，最後再參考閱讀理解的教學法，提出可行的教學設計並舉例說明。

關鍵詞：論證判讀、數學證明、數學教學

壹、前言

從1980 年開始，解題、溝通與連結等數學能力，一直是數學教育努力的目標。而支撐這些能力的基本因子，就是數學論證能力（洪萬生，2004）。數學被視為「證明的科學」（Reiss, Hellmich, & Reiss, 2002）。數學教育國際研討會也接連以「證明與論證」為主題，例如：於台北舉辦之《2002 數學論證國際學術研討會》（2002 International Conference on Mathematics-"Understanding proving and proving to understand" ）及義大利Bellaria 所舉辦的《2003 第三次數學教育研究歐洲社群會議》（CERME 3 : Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education）。進而發行《數學證明教學網路電子報》（International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof）（http://www.lettredelapreuve.it/），無疑地，「數學證明」與「數學論證」已受到數學教育界持續的關注。

構建數學證明是一項極為複雜的認知歷程，涉及的知識也極為繁雜，許多研究指出：學生在構建形式證明上發生許多困難，例如：1.對概念性理解、數學語言與符號、如何開始證明感到困難（Moore, 1994）；2.不能依據深層結構檢驗證明的正確性（Selden & Selden, 2003）；3.缺少證明所需的策略性知識（Weber, 2001）；4.「數學歸納法」的使用有困難（Baker, 1995 ）等。甚至數學教師亦認為數學證明是教學中較困難的單元（王郁華，1996），這樣的結果無疑是一項警訊。Selden 與 Selden（2003）指出：構建證明不可避免的連結到確認可靠性的能力，一個證明不能被可靠的驗證，將無法提供充分的保證。解某些非例行題的需求與判讀能力近似，因為必須查明假定的答案是否正確。許多數學家相信，檢查答案的正確性，最終取決於「構建證明」與「判讀論證」能使用相同種類的演繹推理。

雖然「論證判讀」在數學教育界已引起部分學者的重視。不過，國內的中學教師仍然對「論證判讀」感到相當陌生，到底論證判讀的意義為何？為何論證判讀可以幫助數學的教學與學習？要如何運用在現今數學課堂的教學中？本研究將針對「論證判讀教育理念的起源」、「論證判讀的思維歷程」先行探究、繼而參考「閱讀理解的教學方式」、提出「論證判讀的教學設計」。希望透過本研究的介紹與分析，可以讓這個新的教學理念得到更多現職教師的重視，對於數學教學發揮更大的功效。

貳、論證判讀教學理念的起源

為介紹論證判讀教學理念的起源，以下從「數學社群的運作」、「閱讀理論的啓發」、「數學自學能力的培養」加以說明：

一、數學社群的運作

鄭毓信（1998 ）主張數學家的工作只有獲得社群接受，才能成為數學知識的一部份。最直接例子就是，數學家必須在學術刊物或學術會議上發表研究成果，以期取得他人的理解和評價。事實上這也就是一種審定的過程。Simon 與Blume（1996）更直接將「證明」定義為「數學社群為了判定數學的有效性及發展數學理解，所從事的一種社會與認知過程」。葉明達與柳賢（2005）認為以歐幾里德（Euclid）的《幾何原本》（Elements ）為例，作者對論證做系統的組織，讀者藉文本與作者進行對話、溝通理解。同時，有了書面文本後，可廣為徵求他人之建議，發現缺失與困難，進

而設法解決。因此，論證文本可做爲評估檢討數學證明的藍本。而論證文本經閱讀後判斷其有效性，簡稱爲「論證判讀」，這無疑是一項數學實踐的活動。Hersh（1986）認爲欲培養具數學思維的學生，其意義是讓學生像數學家一樣，面對問題去思考、分析事理、進行判斷，以實用的方式來運用數學。因此，論證判讀活動可爲培養學生數學思維的具體方案。

二、閱讀理論的啓發

Selden 與Selden(2003) 指出1990 年代初期，閱讀理論已將「閱讀」與「寫作」視爲一體。

Selden 與Selden（2003）指出：隨著「閱讀理解」（reading comprehension ）理論的發展，1990 年代初期，閱讀與寫作已被看成整體過程的不同面向，相同地，論證的判讀（validation）與證明的構建也可視爲單一過程的不同面向。從辯證的角度來看，這或許是一種最好的學習方式。一方面構建證明最終是去確認其想法。事實上，證明構建的最後一部分可能就是那個論證的判讀；另一方面，證明是爲想像的讀者而寫，但不同的數學家所知依然有相當大的差別。因此，證明的判讀極可能需要構建子證明（subproof），亦即在每一個過程中，論證的判讀與證明的構建互爲必須。Tierney 與Shanahan（1991）也注意到成功的寫作者不只與讀者產生文意的交流，其本身亦是最佳的讀者（引自McCutchen, 1996）。

對證明構建者來說，構建證明最終是將思維轉化爲文字來確認自己的想法。實際上，構建行爲本身隱含有確認命題有效性的意義；構建數學證明也是一種數學解題行爲，Schoenfeld(1985) 的最後解題階段分別爲驗證答案，證明構建的最後一部分可能就是該論證的判讀。另一方面，判讀者極可能需要構建子證明來確認論證文本的有效性。因此，在「證明的構建」與「論證的判讀」的歷程中，其關係密不可分。顯見，構建數學證明的過程不能避免數學論證的判讀，因此，論證判讀取向的證明教學可能有助於數學證明的學習。

三、數學自學能力的培養

數學知識與日俱增，教學時間有限，老師不可能一一講解所有數學證明，從數學自學的角度，培養學生的數學論證判讀能力，實有其必要性。教育部雖然將閱讀列爲國民教育的指標之一（教育部，2001），九年一貫《課程能力指標》更強調掌握不同文體，擴充閱讀範圍（指標E-2-4），思考並體會文章中解決問題的過程，進而能夠思考和批判文章的內容（指標E-2-10）。但當前學校教育的閱讀能力偏重語文閱讀的養成，數學的特定領域閱讀能力（content-area reading）則較少提及。Flick 與 Lederman（2002） 提倡科學與數學文本的閱讀教學價值，主張因應科學與數學文本在形式、結構與目的特殊性，需要不同於閱讀小說的技能，政府的閱讀評鑑政策應該更重視發展主題特定的文本閱讀技巧。因此，數學學科閱讀能力的培養與評鑑已成爲國外學者關注的要點，缺少數學論證的判讀能力，看不懂數學論證文本，如何要求學生學好數學證明？再者，數學教材常包含許多陳述數學觀點的論證，培養學生的論證判讀能力，有助於未來自學數學教材。

基於上述三點，研究者認爲論證判讀是有其教學功能及重要性的，但是到底論證判讀的思維歷程是如何運作呢？是否有具體的思維歷程可供教學者參考呢？以下將就當前判讀歷程的研究結果進行探討。

參、論證判讀的思維歷程

葉明達與柳賢（2004, 2005）曾以高中生、碩士生、數學教授爲個案，以高中數論及幾何證明爲文本，結合數學解題與閱讀理解理論，進行一系列的論證判讀歷程研究，結果發現論證判讀的思

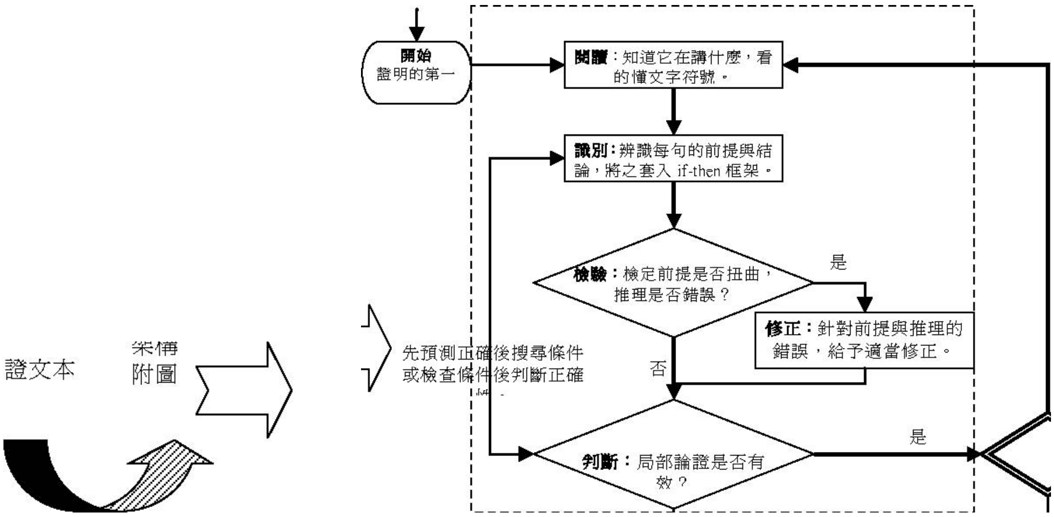
維歷程，可整理如圖1 所示：
運作機制判讀階段

原題前提

開始
證明的第一

巨觀

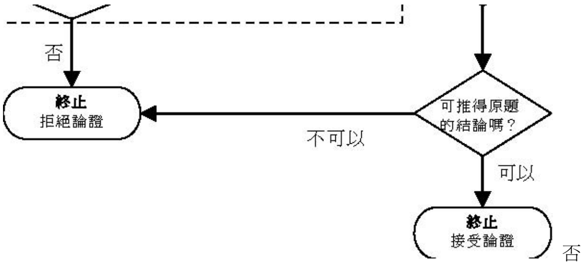
架構 論證文本附圖



有

微觀

終止 可推得原題拒絕論證的結論嗎？不可以



可以

終止 接受論證

圖1 論證判讀的思維歷程（葉明達與柳賢, 2005, 圖五及圖六）

註：1.判讀均由「閱讀」開始，歷程終止在對整體論證文本的「接受」或「拒絕」，箭號指示思維流動的方向。

2.若出現不屬於上下兩行之間的判讀行爲，則涉及「巨觀層面」，其餘屬於「微觀層面」。

此思維歷程由兩部分所構成，分別是「判讀階段」及「運作機制」，彼此之間動態整合運作，茲將相關概念說明如下：

一、判讀階段

依據數學家及數學教育學者的看法，此層面關注判讀歷程的階段劃分，包含「閱讀」、「識別」、「檢驗」、「修正」、「判斷」共五階段（葉明達與柳賢，2005）：

（一）「閱讀」(read) ：有別於數學解題之「讀題階段」。將原始題目（待證命題）與論證（書面證明）稱爲文本，對於文本從頭到尾細讀即爲「閱讀」。閱讀只涉及知道它在講什麼，看得懂那個字、那個符號，但不一定知道那個字的重要性，也不涉及真假值的判斷。

（二）「識別」(distinguish)：隨著判讀的進行，先前被判斷爲有效的子結論，可爲後續命題的子前提，隨著判讀的進行，論點的範圍不斷擴展。文本中某一段可以是下一段的子前提，也可能是前一段的子結論。「識別」就是辨識出命題的結構、關鍵字或意義。

（三）「檢驗階段」(inspect) ：檢驗分成對單一命題的檢驗，及從前一個命題到下一個命題之間推理的檢驗。檢驗是爲了提供判斷依據，或爲支持先前判斷而搜尋特定的條件。若有質疑，通常會導致進一步檢驗，但也可能沒辦法檢驗，而直接跳到判斷。

（四）「修正階段」(correct) ：檢驗之後，也可能認爲所質疑的論點只是跳太快，在加註自己的推論後，給予較寬鬆的解釋。

（五）「判斷階段」(judge) ：判斷是表達此論點正確或錯誤。判斷可能是覺得它是對的再去找條件，或判斷後檢驗來支持其判斷，所以檢驗可在判斷前或後。可分成對「局部論點」的局部評估與「論證文本」的全面評估。

判讀歷程由「閱讀」啓動，先理解待證命題，當文本「有特定證明架構」，先評估證法使用的適切性，若適用，則接續「閱讀－識別－檢驗－相信」的循環。當認爲論證均可理解，論據也都充分，就可能「接受」證明的有效性；若有所不理解或質疑便開始檢驗，可能接續「閱讀－檢驗－修正」的循環，也可能選擇先跳過，繼續下一行的「閱讀」。檢驗後認爲有錯誤時，可能會「修正」，若認爲無法修正，可能就會「拒絕」，若可以修改就可能回到「閱讀－識別－檢驗－相信」的循環，最後終止在證明有效性的「接受」或「拒絕」。

二、運作機制

「機制」是判讀者為了有效的判讀文本而執行之特定程序。葉明達（2005）發現判讀的運作機制可歸納成「文本有確切證明架構」、「文本無確切架構」、「附圖為主」、「附圖為輔」四種型態。「文本有確切證明架構」的判讀會依循證法架構（如數學歸納法、反證法），先對證法適用性預做評估（是否適用於該待證命題），依序檢驗證法的關鍵步驟，對不理解的部份做出局部修正；「文本無確切證明架構」的判讀不再跳選特定步驟預先判讀，而是依循文本各行順序閱讀，對不理解的部份評估其重要性，並做出局部修正；「附圖為主」的判讀則同時對照文本與附圖，對不理解的部份評估其重要性，並做出局部修正；「附圖為輔」的判讀則依據文本的敘述，檢驗圖形轉化為計算的正確性，對不理解的部份評估其重要性，並做出局部修正。專家較能因應判讀困難，跳脫「檢驗前後兩行之間推理」的「微觀層面」判讀方式，而進行「巨觀層面」（「整體文本的架構的適用性」、「附圖與文本的對應性」）的評估，亦即思維運作涵蓋層面較廣，而這正是專家優勢所在。

在階段上，教師在設計「論證判讀教學活動」時，不應將論證判讀簡化為「閱讀數學課本的證明」，如此「修訂」局部論點階段將無由發生。而在機制上，巨觀、微觀的運作機制的浮現，亦成為有效的論證判讀教學活動之評鑑目標，教師可據以觀察學生是否能運用巨觀層面的判讀運作，促進判讀成效。研究者認為「論證判讀的思維歷程」理念，清楚地詮釋「判讀階段的種類」與「運作的可能機制」，讓論證判讀的教學模式與意義更加完整。論證判讀的進展是個人藉由文本與他人（論證文本的作者）對話下產生，透過異常論點的閱讀、識別、檢驗、修正、判斷，方可能超越字面的理解，是數學知識發展中不可輕忽的一環，也是一種具有知識創造力的教學活動。

肆、閱讀理解的教學法

前面已就論證判讀教學理念的源流加以分析，並介紹論證判讀的思維歷程，如何將研究理念落實在真實的教學現場中，數學教育學者有這樣的責任與義務提供更具體的論證判讀教學設計，以引導未來教學實驗的進行及課室現場的運作。由於目前並無相關的論證判讀教學實驗或教學方法可供參考，而論證判讀屬於數學領域特定的閱讀行為，參考閱讀理解的教學理論，針對論證判讀活動加以調整，不失為可行的方案，因此就閱讀理解的教學法闡述如下：

一、直接教學法

在行為主義的思潮下，教學者應先瞭解學習者的起點行為，並將教材有系統、有組織的分成幾個小單元，每一位學生必須精熟先前的單元之後，才能繼續下一單元的學習。因此，又被稱為「精熟教學」（Hunter , 1982）。直接教學法(direct instruction) 過於強調機械式的學習，在結構鬆散的領域(如理解)可能無益於學生。Dole(2000) 指出80 年代以後，受認知心理學的影響，直接教學法轉化為「明確教學」(explicit instruction)， 不僅告訴學生什麼該學，也讓學生知道如何學、何時要學。明確教學不像傳統直接教學法將理解歷程拆解成許多「次技巧」，而是將理解視為整體來教導，不再強調理解過程「精熟」的重要，而是著重閱讀情境的不同，理解會隨著讀者背景知識和策略不同有所變化，所以教學要彈性調整。

總結來說，直接教學法是由教師擔負教學的責任，規劃所有教學活動，讓學生在教師所設計的課程中學會相關的知識和技能，並明白學習這些知識和技能的目的，學會如何監控、調整閱讀的過程，進而了解文意（連啓順，2002）。

二、合作學習教學法

合作學習（cooperative learning instruction ）是指學生們一起進行作業，以達成共同的目標，它不像競爭，而是一種學習（李茂興譯，1998）。Slavin(1996) 歸納出合作學習四個主要的理論基礎：

（一）動機觀(motivational perspectives) ：強調報酬及給予目標，當團體中每一成員皆能達成個人目標時，團體才算成功，並獲得報酬，因此成員必須互相協助。

（二）社會觀(social perspectives) ：社會觀源自於同學間相互關心，希望他人也能夠成功，只要學生覺得學習活動有趣、具挑戰性，團隊活動的過程本身就是最好的獎勵。

（三）認知精緻觀(cognitive elaboration perspectives) ：重視訊息的心理運作歷程，學生在同儕互動中彼此教導，可以加強訊息的處理，讓學生重構、精緻化知識，深入瞭解知識。

（四）發展觀(developmental perspectives) ：在Vygotsky 和Piaget 的理論影響下，此觀點重視學生的互動，從合作過程中提昇學生的概念理解層次。Johnson 與Johnson(1987) 認爲合作學習有下列共通成分(陳淑絹，1995)： （一）積極的相互依賴（positive interdependence）：團體的成員對於團體都是不可或缺的。（二）面對面互動(face to face interaction) ：可藉由互動向其他成員解釋如何得到問題的解答，在此過程中，學生將可互相協助以瞭解整個教材。（三）個人績效（individual accountability）：強調團體成員各自的貢獻，以預防一些搭便車的行爲發生。（四）人際技巧（ interpersonal skills）：不僅學習學科，學生也必須學習團體工作。因此，必須相互信賴、明確溝通、相互支持與接受。整體而言，合作學習法強調團體目標和個人責任，透過同儕的互動，讓團體中高能力者幫助低能力者，以共同達成學習目標(Slavin, 1996) 。

三、交互教學法

由Palincsar 與 Brown 參考Vygotsky 的「近側發展區」（zone of proximal development, ZPD）理論，以及Wood 等人的「專家鷹架」（expert scaffolding）理論所設計而成（Palincsar & Brown, 1984；Rosenshine & Meister, 1994）。強調學生學習過程中，最初由專家提供訊息給生手，當生手能力增加時，專家的支持就逐漸減少，如同建物結構完成時，就拆走鷹架，逐漸建立學生自我學習與獨立運作的能力，以現有的認知發展爲基礎，不斷地促進學生最大潛能之發展。

Palincsar 與Brown（1984）認爲要探查學生如何理解文章，要注意四種因素：解碼流暢性、文章合適度、合宜的內容和策略的使用。他們認爲若提供看得懂的文章，並不合乎教育目的，生活中一定會遇到不適當的或不熟悉的內容，而「策略的使用」有助於跨越學生不熟悉的領域。「交互教學」(reciprocal teaching) 可分爲兩部分：「教導和練習閱讀理解策略」、「互動教學」，運用師生「對話」的歷程來做爲學習策略的方式。課程初期由教師具體而明確地將策略運用在閱讀的課文上，示範給學生了解。再讓學生在下個段落練習使用這些策略，教師利用回饋、示範、教導、提示和解釋等活動協助學生學習。隨著課程的進行，教師逐漸淡出成爲學生學習的觀察者，只有在學生需要時提供協助，由學生負擔起學習所有的責任。而在閱讀的過程中，同儕的討論也提供彼此學習的鷹架，讓每位學生有機會進行練習與接受回饋（許淑玫，1998；Rosenshine & Meister, 1994）。因此交互教學法著重在「師生互動」及「同儕互動相互學習」中習得閱讀理解的能力。

總而言之，直接教學法著重教師的教學責任；合作學習法鼓勵學生相互協助，共同承擔責任；交互教學法強調師生對話，以及學習責任的轉移（連啓順，2002）。本研究認爲判讀活動對學生是全新的體驗，教師則在數學研究的訓練下，或在批閱學生的數學證明題答案時，會有較多的論證判

讀經驗，故一開始將責任完全轉嫁給學生可能並不合適，因此將以「交互教學法」爲主軸，來設計論證判讀的教學活動。

伍、論證判讀的教學設計

基於先前對「論證判讀的思維歷程」的探討，以及對閱讀理解教學法的回顧，本文試圖提出「論證判讀的教學設計」，期望能透過此一教學設計的運用，而增進學生對數學證明的學習興趣及論證判讀能力的發展。以下以現行高中數學第一冊第二章「數學歸納法」單元爲例，分別從教學目標、教學內涵、教學方法、教學流程來介紹此一教學活動。

一、教學目標

藉由本「論證判讀教學活動」，教師的教學目標有四：

（一）讓學生瞭解什麼是論證判讀。

（二）讓學生瞭解並習得論證判讀各階段執行方式。

（三）讓學生瞭解並習得論證判讀運作的機制。

（四）提昇學生數學證明的學習興趣。

二、教學內涵

基於上述教學目標，研究者認爲教學活動的內涵至少應該包含兩種層面，結合兩種層面的教學活動，方可達成上述目標：（一）「透過論證判讀來教學」：即將論證判讀視爲一種教師教學的方式，亦即讓教師透過論證判讀來學習數學證明的知識與概念。（二）「爲了論證判讀而教學」：即將教學的目的設定爲協助學生獲得論證判讀的經驗與策略使用能力，即「數學證明自學能力」的獲得。

三、教學方法

本研究之「論證判讀教學設計」之教學取向，主要參考閱讀理解教學法之「交互學習法」，其教學方法如下：（一）情境學習

論證文本來自於預先收集之學生論證文本，其目的在於讓學生判讀同儕所寫的論證文本，以模擬數學家判讀其他數學家的論證文本之數學社群運作方式，並可讓學生從真實與多元的情境中理解判讀活動的目的與方式，且論證文本的背景知識與學生的起點行爲較能配合。

（二）責任轉移

教師需透過放聲思考示範判讀歷程、進而教導判讀階段的目的與應注意事項、巨觀與微觀層面的交替運作方式，可適時提供認知鷹架，最後淡出，漸漸將責任轉移給學生。

（三）同儕合作

學生可能無法在一開始便進行個人判讀，故可藉由學生同儕的小組合作來進行，教

師可依據其合作意願或數學證明能力的異質性分組方式，讓小組成員分享學習經驗，共同承擔責任。

四、教學流程

本研究之「論證判讀教學設計」之教學流程，主要係以「數學歸納法」單元爲例。當數學歸納法單元教學完成後，進行證明寫作的總結性評量，此即爲「論證判讀教學」

的起點，其教學流程如下：

（一）寫作評量

論證判讀教學設計的第一階段爲要求學生證明特定命題，此命題即數學歸納法總結性評量的試題，該命題的取材可爲課本習題或課外具挑戰性的證明題，例如：《設u, v 爲正整數，$u^2 + uv + v^2$ 能被9 整除。求證：u 與v 都能被3 整除》。將其規劃爲第一階段的原因有三點：1.現行的教育體制下，寫作評量依然是數學證明單元主要的評量方式，論證判讀的目的不在取代傳統的證明寫作評量方式，而是提供論證判讀教學活動以輔助傳統教學不足之處；2.寫作評量之論證文本可爲後續論證判讀文本的來源，如此，教學的材料將不虞匱乏；3.學生個人證明能力之高低，可爲後續異質性分組之參考標準。

（二）文本分析

第二階段爲教師收集學生證明特定命題的文本，從回收的證明題答案中，透過持續比較、分類等方式，找出具代表性文本，茲舉例如表1。先由教師實際判讀論證文本，找出判讀的關鍵點，以作爲「數學論證文本」，並設計判讀理解性問題（如表2）。

表1 數學論證文本舉例

列次
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(8)
(9)

論證設$u^2+uv+v^2=9n$，n 爲正整數，當n=1 則$u^2 + uv + v^2=3×3$， 設n=k 時成立令$u^2+uv+v^2=3×3k$，k 爲正整數。當n=k+1 時，則$u^2+uv+v^2=3×3(k+1)=3(k+2)$ 亦成立，由數學歸納法得知，u^2+uv+v^2 能被3 整除，故$u^2+uv+v^2=3m$，m 爲正整數又$u(u+v)+v^2=3m$，故u 和v 爲3 的倍數。

表2 判讀理解性問題舉例

題號	列次	判讀理解問題	階段	機制
(1)		這裡使用什麼證明方法？	識別	巨觀
(2)		這個證明正確、只證明某些特例、還是架構與方向錯誤？爲什麼？	判斷	巨觀
(3)	(1)	爲何可以設$u^2 + uv + v^2=9n$？	檢驗	微觀
(4)	(2)	「當n=1 則$u^2 + uv + v^2=3×3$ 」是從何而來？目的是要說明什麼？	檢驗	微觀
(5)	(4)	爲何直接「令 $u^2 + uv + v^2=3×3k$ 」， 而沒有代數字檢查？	修正	微觀
(6)	(6)	「$u^2 + uv + v^2=3×3(k+1)=3(k+2)$ 」正確嗎？爲什麼？	判斷	微觀
(7)	(8)	$u^2 + uv + v^2=3m$ 是從何而來？	識別	微觀

(8)	(9)	「$u(u+v)+v_2=3m$」可以省略嗎？爲什麼？	判斷	微觀
(9)	(1)~(7)	前七行證明了什麼？	判斷	巨觀

（三）教師示範

教師透過放聲思考（如表3），示範判讀階段的進行，巨觀（整體文本的架構、文本與附圖的對應）與微觀（文本前後兩行之間）層面的交替運作，並可提供「判讀階段提示表」（如表4）以爲鷹架支持，例如：「能否舉出正例或反例，定理的條件是什麼？結論是什麼？推導的論證架構是什麼（焦建玲與莊萬林，1999）？」降低學生的認知工作負荷，逐步引導學生將判讀能力內化，最後教師淡出，並將學習責任轉移給學生。

表3 教師示範放聲思考舉例表4 判讀階段提示表

教師示範口語資料	階段	機制
照題目一開始的條件設$u_2 + uv + v_2=9n$ ，然後n。	閱讀	微觀
它用數學歸納法，	識別	巨觀
第一步是正確，	局部判斷	微觀
再用數學歸納法，n 用1 代進去，	閱讀	微觀
好，n 用1 代進去，這個是9 的倍數，假設n=k 的時候成立，這個就是，等於9 的倍數， $u_2 + uv + v_2$ 等於9 的倍數，則當n=k+1 的時候等於，等於3 乘於3 倍的等於3 乘於3 倍的。我在看它在證什麼，我再重看一次。	閱讀	微觀
我可以一下子看出來它整個的形式是數學歸納法， 現在它證n=1 的時候是檢查代進去是合的， 再來n=k 的時候假設成立是9 的倍數，再來n=k+1 的時候， $u_2 + uv + v_2$=….	識別	巨觀
我有點懷疑它第六步怎麼算出來，	局部判斷	微觀
等一下我先看完整個文本。	閱讀	微觀
這跟n 有什麼關係， 不是本來就假設9 的倍數嗎， 它在證什麼【注意到這是無效的推導】	識別	微觀
好， 我再看一下第7 行， 由數學歸納法得知， 這個式子能被3 整除， 由數學歸納法這整個中間這一段， 由數學歸納法得知， 能被3 整除， 故這個式子是3 的倍數，	閱讀	微觀
我有點懷疑它在亂證，	局部判斷	微觀
我再看一次【第三次重讀】	閱讀	微觀
它現在用數學歸納法，去說明$u_2 + uv + v_2$ 能被3 整除，如果它是9 的倍數，它一定能被3 整除【歸結大意】，	識別	巨觀
這不用數學歸納法就可以證了啊，	整體判斷	巨觀
然後$u_2 + uv + v_2$ 是3 的倍數，把它分解開來，故u 和v 爲3 的倍數。	閱讀	微觀
我檢查一下，我先看一下它整個大方向在作什麼事情？我試著去理解它在說什麼，它在想什麼？	識別	巨觀
好，這整個是數學歸納法，	識別	巨觀
但它數學歸納法只有形式， 由數學歸納法知道能被3 整除， 這句到這句沒有錯【第一行到第七行】， 可是不需要數學歸納法	局部判斷	巨觀
所以這裡能被3 整除， 這不需要數學歸納法， 本來就是了， 故這個是3m，本來就是， 所以它現在的重點是第9 行， 它有證明出最後結論嘛， 它把它分解開來$u_2 + uv + v_2=3m$，故u 和v 是3 的倍數，	識別	巨觀
證個大方向是，前提跟結論是對的，但中間是胡扯	整體判斷	巨觀
n=1 時候，這個是正確的，代進去，假設n=k 的時候成立，正確，當令它=3×3k，那n 用k 代，對，我覺得它整個方向都是錯的	整體判斷	巨觀

階段	機制	提示問題舉例

閱讀	微觀層面	1.證題的前提與結論是什麼？
	巨觀層面	2.證題與圖形配合嗎？
識別	微觀層面	1.論點的前提與結論是否能清楚地區分？是否有隱匿的前提或結論？
	巨觀層面	2.這個文本具有特定的證明架構嗎？
檢驗	微觀層面	1.前後兩行的計算或推論連貫嗎？
	巨觀層面	2.此證明架構適用於此證題嗎？
修正	微觀層面	1.舉出的反例是否提示出局部論點的修正方向？
	巨觀層面	2.這些修正的有無，對判讀結果的影響爲何？
判斷	微觀層面	1.是否對受質疑的局部論點的正確性加以評估？
	巨觀層面	2.整體評估依據爲何？

（四）小組判讀

依據第一階段個人證明寫作的表現，採取異質性分組，強調每個成員的重要性，除了小組成果也比較個人績效。先以小組合作進行論證判讀，並回答判讀理解性問題，鼓勵學生對於彼此的觀點，相互挑戰。當學生不同意他人的觀點，就同時遭遇社會與認知上的衝突，這個經驗包含首先個人必須能察覺有不同於自己的觀點，其次必須開始檢視自己的想法，重新評估想法的有效性，進而學會爲自己的想法辯護，若要他人接受自己的想法，要先能將自己的理念清楚地表達出來。因此Piaget 認爲學生在同儕互動的過程中，社會與認知方面均有獲益：在社會性的發展方面，改善了溝通技巧；在認知的發展方面，重新檢視了自己看法的真實性（Grisham & Molinelli,1995）。

（五）全班討論

由各小組代表上台公開發表其判讀結果與論據（warrant），鼓勵學生使用明確描述的字詞，分享小組所使用的判讀策略，經由班級討論，形成共識，編入「判讀階段提示表」中，使判讀策略更形充實。透過分析、比較等方式，對於班級社群的「論證接受判準」形成共識。

（六）個人判讀

爲促進學生論證判讀能力的增長，學生透過與小組成員、教師有效的互動後，而達成責任的轉移，學生最終將獨自判讀另一論證文本，以對於個人判讀能力的進展進行驗收與考核，在此階段評量的重點不只在論證文本有效性的判斷結果是否正確，亦需關注判讀的歷程中是否能使用適切的判讀策略？是否具備正確的論證接受判準？教師可以要求學生個人以放聲思考的方式判讀，抑或是要求學生回答論證判讀理解性試題，以對學生的成效進行診斷性評量。

整個教學過程可整理如圖3，教師亦應適時以師生對話，提示判讀歷程各階段的重點及巨觀、微觀的交替運作方式，並強調判讀活動的教育意涵，在於培養學生的數學證明自學能力，鼓勵學生將判讀的活動力行在日常數學課本、數學參考書的證明上，以主動的意義建構取代被動的學習方式。

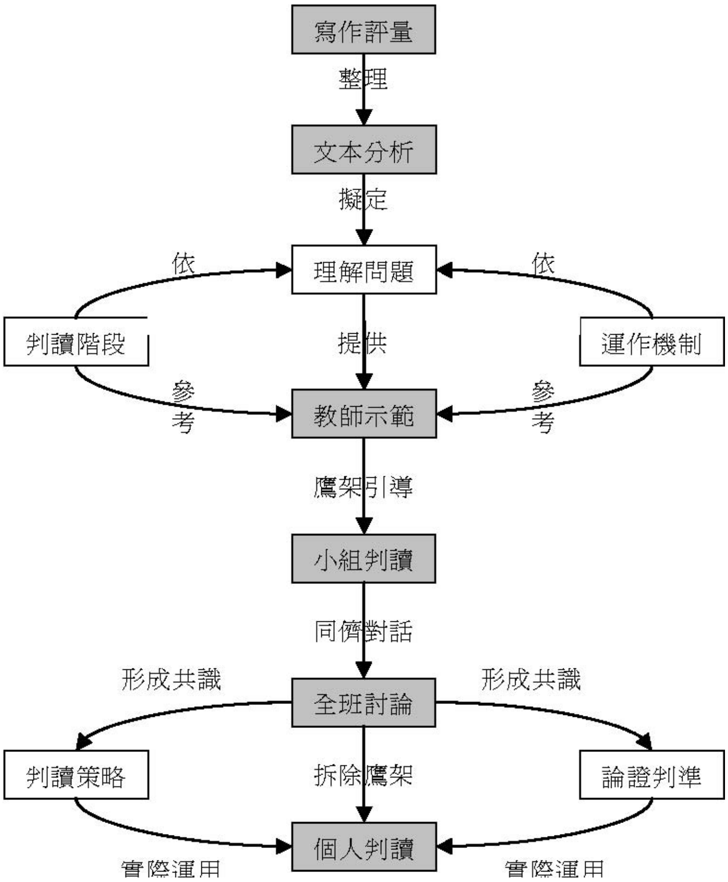


圖3 論證判讀教學的可能模式圖

陸、結語

「數學證明」是數學社群運作必然的產物，也是促進數學理解不可或缺的工具。有鑑於許多學生在數學證明的學習困難，在傳統的證明構建教學方式之外，以論證判讀來輔助數學證明的教學，可能有助於提升數學低成就的學生對數學證明的學習意願（葉明達、柳賢，2004）。研究者曾以八位高中生爲樣本，進行爲期兩個月的判讀活動，當詢問學生：「你認爲判讀同一命題的『不同』數學證明，對你在數學證明的學習上有幫助嗎？」只有一人認爲論證判讀對證明學習不一定有幫助，其餘七人均認爲有不同的幫助；主要的幫助爲「不侷限在同一種證法」（3 人次）、「瞭解各種證法」（2 人次）； 此外，有能力的判讀者可以從錯誤的文本中學習，釐清未曾注意到的細節。例如：文本的「數學歸納法」，當前的教科書很少呈現將n=k 與3 的倍數9n 混淆的文本，判讀該文本時，留意到同學會犯這樣錯誤，進而將這樣的訊息納入基模中，使得證明的知識架構更完整，即爲「從錯誤中學習」的具體實踐。至於判讀對個人證明學習的影響：有兩人認爲判讀的次數因參與活動而增加，主因是「自然成習慣」；有六人認爲判讀的次數並沒有因參與活動而改變，主因是「遇到證明的機會不多」（3 人次）。認知運作的學習，必然需要長時間的練習，方可考驗成效；個案的說法，暗示判讀對證明的影響似乎是正面的。

在二十一世紀的今天，數學知識的增加速度越來越快，傳統「被動接受式」教育已經無法符合時代所需，邵光華（1999）主張數學閱讀有助於自學能力的培養。同樣地，老師不可能有時間一一講解所有數學證明，從終身學習的角度，培養學生的數學論證判讀能力，亦有其必要性。教

育不光是要培養能獨立思考解決問題的人才，更重要是要具有尊重他人、溝通協調的民主素養。當判讀別人證明時，要求學生以客觀的態度去解讀文本的意涵，使思考相互激盪，重新審視自己想法的合理性，有助於學生數學知識的重整，澄清個人的數學證明觀念。論證判讀增加了學生主動學習的機會，讓每位學生都可以是學習的主角，上課自然會專心。若能配合適當課程與教學程序，論證判讀的教學也才能真正落實。本文希望透過「論證判讀」教學理念的介紹，讓學者與現職教師對「論證判讀」有更多的認識，並引導第一線的教師投入實作，發展論證判讀教學模組，將論證判讀教學設計，修訂得更加完善。

參考文獻

王郁華（1996）：臺灣南區中學數學科教師信念之研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文。未出版，高雄。李茂興（譯）（1998）：教學心理學。台北：揚智。邵光華（1999）：關於重視數學閱讀的再研討，中學數學教學參考，**10**，7-9。洪萬生（2004）：教改爭議聲中，證明所爲何事？台灣師大學報（科學教育類），**49**（**1**），1-14。

教育部（2001）：國民中小學九年一貫課程綱要。台北：教育部。

許淑玫(1998) ：閱讀理解教學－交互教學法。國教輔導，**37**，31-39。

連啓順（2002）：國內閱讀理解教學研究成效之統合分析。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所碩士論文。未出版，台北。

陳淑絹（1995）：「指導—合作學習」教學策略增進國小學童閱讀理解能力之實徵研究。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所博士論文。未出版，台北。

焦建玲與莊萬林（1999）：數學閱讀技能及其培養，中學數學教學，**4**，6-8。

葉明達（2005）：數學論證判讀機制之研究。國立高雄師範大學科學教育研究所博士論文。未出版，高雄。

葉明達與柳賢（2004）：建立數學論證判讀認知機制之個案研究。花蓮師院學報（教育類），**19**，85-118 。

葉明達與柳賢（2005）：幾何論證判讀歷程之個案研究。臺東大學教育學報，**16(2)**， 43-92。

鄭毓信（1998）：數學教育哲學。臺北：九章。

Baker, J. D. (1995). *Characterizing students' difficulty with proof by mathematical induction* (Doctoral Dissertation, Indiana University, 1995): Dissertation Abstracts International, UMI # AAT 9544399.

Dole, J. A. (2000). *Explicit and implicit instruction in comprehension*. In B. M. Taylor, M. F. Graves & P. van den Broek (Eds.), Reading for Meaning: Fostering Comprehension in The Middle Grade (pp. 1-31). NY: Teachers College.

Flick, B. L., & Lederman, G. N. (2002). The value of teaching reading in the context of science and mathematics. *School Science and Mathematics*, *102*(3), 105-108.

Grisham, D. L., & Molinelli, P. M., (1995). *Cooperative learning*. Westminster, C. A.: Teacher Created Materials, Inc.

Hunter , M.（1982）.*Mastery Teaching* . EI Sequndo, Calif. : TIP Publication.

McCutchen, D. (1996). A capacity theory of writing: Working memory in composition. *Educational Psychology Review*, *8*(3), 299-325.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27,* 249-266.

Palincsar, A. S., & Brown, A. L. (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering comprehension-monitoring activities. *Cognition and Instruction, 2,* 117-175.

Reiss, K., Hellmich, F., & Reiss, M. (2002). *Reasoning and proof in geometry: Prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students* In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education(Vol. 4, pp. 113-120), Norwich, England.

Rosenshine, B., & Meister, C. (1994). Reciprocal Teaching: A Review of the Research. *Review of Educational Research, 64*, 479-530.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* NY: Academic.

Selden, A., & Selden, J. (1999). *The role of logic in the validation of mathematical proofs.* Cookeville, TN: Tennessee technological university. (Department of mathematics technical report, No. 1999-1). Retrieved June 25, 2003, from http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_1999_1.pdf.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for research in mathematics education, 34*(1), 4-36

Simon, M., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: a study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 15,* 3-31.

Slavin, R. E. (1996). Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. *Contemporary Educational Psychology, 21,* 43-69.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48* (1), 101-119.

The Study of Validating Process of Mathematical Argumentations and Its Instructional Design

Ming-Da Ye[1] Guan-Chyun Lin[2] Yen-Ting Chen[3]

[1] Kaohsiung Municipal Hsin-Chuang Senior High School
[2] Science Education Center, Fooyin University of Technology
[2] Department of Child Care, Chung Hwa University of Medical Technology

Abstract

In the wave of educational reform, not only is secondary education innovative in curriculum, but also some innovative teaching objectives have been raised continually. For example, National Council of Teachers of Mathematics also vigorously initiates “Instructional programs should enable all students to develop and evaluate mathematical arguments and proofs.” Researchers believe that in the “argumentation validation” activity, students can compare their “mathematical argumentations” with the “mathematical proof constructed by mathematical society”. They negotiate with each other, and determine which one is a valid mathematical proof, leading themselves to students reflect turning points in their thinking processes. Therefore, it should be appropriate to apply “argumentation validation” to the classroom. We first explore the origin of teaching concept “argumentation validation” in this paper, and then present the thinking process of “argumentation validation”. Finally we refer to the teaching method in reading comprehension, and come up with some possible teaching designs and provide examples.

Key words: argumentation validation, mathematics proof, mathematics teaching