兒童分數迷思概念與解題策略之研究

黃志敘[1]　楊德清[2]

[1]雲林縣台西國民小學　[2]國立嘉義大學數學教育研究所

（投稿日期：95 年 11 月 22 日；修正日期：96 年 5 月 3 日；接受日期：96 年 5 月 6 日）

摘　要

本文之主要目的在探究離散量情境下，小六兒童常見之分數迷思概念與多元解題策略。因此，本研究採立意取樣選取雲林縣某一中型小學六年級之一班學生，共 32 位參與本研究。結果顯示小六兒童常見之分數迷思概念為：1.不了解分數的意義；2.缺乏子集合~集合之概念與 3.缺乏單位量概念等三種。而兒童多元的解題策略為：1.善用圖形表徵方式解題；2.以單位分量為基礎，以進行解題；3.利用除法進行解題；4.利用分數的乘法進行解題等多種不同的解法。

關鍵詞：小六、離散量、分數。

通訊作者 楊德清　dcyang@mail.ncyu.edu.tw　05-226-3411 ext 1924

壹、 前言

國小教師常常感嘆：「分數真的好難教!」，而小朋友亦常常抱怨：「分數好難啊!我真的聽不懂！」的確，分數概念的教與學，對多數的國小教師與兒童而言是相當困難的部分（Cramer, Post, & delMas, 2002; Southwell, 1985）。然而，分數在小二下學期以後的數學課程便如影隨形地跟隨著每一位學生，儘管它在實際生活情境中並不常出現，但它卻在數學課程中佔有相當重要的角色（劉秋木，1996）。因此，具備穩固的分數概念在小學階段是必須的。

Behr, Wachsmuth & Post (1988)指出連續量和離散量的概念在學習分數概念時所需的知識並不相同。在連續量方面，一個連續量被平分成幾等分後，每一部分仍是單獨的連續量，兒童比較容易感受，因此較能清楚地概念化。然而在離散量方面，以一打鉛筆有 12 枝為例；對兒童來說明明是 12 枝鉛筆，卻要將全部當作「1」，1 枝鉛筆又是$\frac{1}{12}$打，的確是不容易理解。同時$\frac{1}{3}$打又要將 12 枝分成三部分，每部分有 4 枝，在這過程當中分別產生不同的單位分量，對兒童而言又是難上加難。研究者在實際的教學經驗中亦常常發現，在學習分數離散量的情境下，會出現多樣的錯誤及迷思概念，也就是學生並沒有在我們的教學過程中，建立穩固的分數意義。因此，離散量顯然比連續量在兒童分數概念的理解上較困難且複雜許多。

基於此，本文之主要目的在探究離散量情境下，小六兒童常見之分數迷思概念與多元解題策略。

貳、 文獻探討

Dickon（1984）和呂玉琴（1996）指出可將分數概念分為「部份／全部」關係的描述、「子集合／集合」關係的描述、「小數」、兩數相除的結果、「比值」、數線上的一點。其中，大部分的研究都發現「子集合／集合」的意義比「部份／全體」較難被學生接受（李曉莉，1998；林福來、黃敏晃與呂玉琴，1996；吳宏毅，2001；陳瑞發，2002；游政雄，2001；黃靖瑩，2002；Hunting, 1983； Keralake,1986； Larson,

1987）。也就是說此兩種分數概念對學生而言是有所不同的，因此學生在連續量情境問題或離散量情境問題的思考方式也會不一樣（林福來、黃敏晃，1993；Hiebert & Tounessen, 1978）。

林福來等人（1996）對二年級學童進行分數概念啟蒙教學實驗結果發現學生能以二分之一、四分之一描述連續量及離散量分配的結果，但在離散量情境如有奇數個離散物時用二分之一表達二等份的結果有困難，離散量情境比連續量情境容易發生自行更改給定的單位量的問題。而在單位量的分數問題中，一個連續量被平分成 N 等份後，每一部分仍是單獨的連續量，學生能清楚的做部分量與整體量的比較，但一個離散量的整體被等分成 N 個子集後，每一個子集裡面包含的是一個個分開沒有連結的個體，要以分數來描述部分量時必須先將離散的個物看作一個整體 (Behr, Wachsmuth & Post, 1988)。由此可見，離散量顯然比連續量在兒童分數概念的理解上困難且複雜許多。

再者，離散量除了考慮內容剛好可分完、在內容無法剛好可分完的情況下又需考慮實際的情境，可分割或者虛擬可分割者，最後在剩餘的部分又是連續量分割的問題。例如：一盒月餅 6 個，$\frac{1}{5}$盒是多少個月餅？分成五份後，每一份分配一個月餅，剩下一個月餅便要進行連續量的分割問題了。而大部分相關文獻只介紹連續量與離散量剛好可分完且相同形狀的內容物之教學活動，忽略了離散量實際情境下無法分完的分割問題及不同形狀內容物的分配問題。因此，離散量所涉及的多單位及內容物分配的問題，是需更進一步深入了解及探討的問題。

參、 研究方法

研究法

本研究採個案研究法，以一個班級為單位，資料蒐集乃藉由錄音筆及攝影機將訪談、學生課室的分組討論、學習單、數學日誌及教學日誌之實際情形予以記錄，以分析兒童解題時所產生迷思概念及歸納兒童的解題類型。

參與對象

本研究以某縣沿海一中型小學六年級之某班學生為研究對象，班上共 32 位學

生。全班共分成十六組，每組編碼分別為 P1、P2、P3……P16，每組有二人。P1（S1，S2）之 P1：代表第一組，S1：代表學生，依此類推。學生家長之背景大部分是從事農、漁業，少部分是公、商業，家長社經地位差異並不大，但是學生在數學成績表現則差異頗大。

評量活動之設計理念

一般教科書都以內容物一樣，做為處理離散量方面的分數問題，鮮少看到有關處理內容物不一樣的問題。但日常生活中很多包裝內容物並不是單單只有一種，也許會有二種或二種以上的不同東西。因此在國小階段有必要提供內容物外形不一樣之情境，讓兒童更能體會出分數在生活上所面臨之實際問題。本活動之佈題乃運用七巧板之 1 至 7 號板子之面積可等分割且大小具倍數關係(如圖 1)之特性，做為分數離散量佈題之教具。此內容物剛好可分完，且內容物可分為外形一樣與外形不一樣兩種，以觀察兒童在這類型相關分數概念及解題策略有何不同。

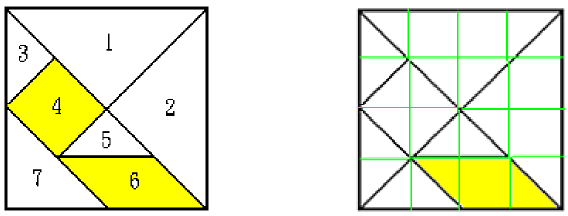


圖 1：七巧板之切割圖

活動內容：

（1）內容物外形一樣，大小也一樣（如圖 2）

一盒中有 12 塊三角形（5 號板）請指出 $\frac{1}{6}$ 盒？（並說說看你的想法）

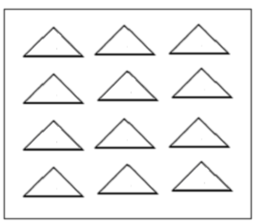


圖 2：內容物外形、大小一樣

（2）內容物外形不一樣，但大小一樣（如圖 3）

一盒中有正方形（4 號板）和三角形（7 號板）請指出 $\frac{1}{6}$ 盒？（並說說看你

的想法）

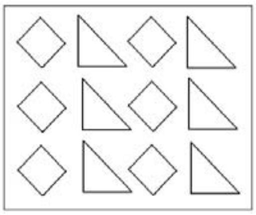


圖 3：內容物外形不一樣但大小一樣

活動目標：透過內容物剛好可分完，在評量活動中觀察兒童在分數離散量迷思概念與多元解題策略。

研究信效度

本研究之信度主要是考量研究議題是否跟其從事工作經驗有關；由十多年數學教學經驗的教學者與協同教師，以及數學教育研究者共同確保教學活動內容符合學生學習的範圍。而在效度方面則依人員之三角檢定與資料來源之三角檢定進行持續比對，以人員之三角檢定為例：

協同教師：選一塊正方形（4 號板）和三角形（7 號板）的圖形，要算對或錯？我認為兒童概念應是正確的！

教學者：不過我有問 S25 盒中的正方形或三角形是否一樣？S25 的回答：「外形不一樣所以大小就不一樣！」，所以我認為 S25 的分數概念並不完全正確！

研究者：以正方形（4 號板）和三角形（7 號板）為例，若相關概念不清楚，是很容易直觀認為不一樣大！所以由直接從答案對錯來認定有時很難判斷兒童是否真正了解數學，必須深入探討才能更確定兒童想法。丁老師點出了問題，黃老師有不同見解，S25 雖有等分概念但卻沒有和第一部分教學活動連結以致於忽略面積的保留概念！導致無法合理說明清楚。

對教學活動所發現的問題，透過教學者與協同教師的觀察及反應，最後三位參與研究者討論形成共識。

肆、 評量活動的實施歷程

以下歸納本研究所發現之四種不同分數迷思概念及五種不同之解題策略：

一、活動中所發現之分數迷思概念

（一）不了解分數的意義（P1、P4、P15、P16）

1.S27 這組同學，由於不了解分數的基本意義，因此天馬行空地任意猜測。

原案一之一

T ：$\frac{1}{6}$盒有幾塊？

S27：$\frac{1}{6}$塊！

T ： 你能不能用圖形表示！

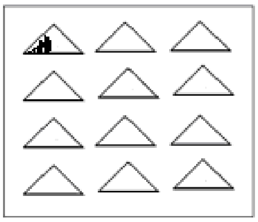
S27： 

圖 4：S27 之表徵方式

T ：那請你解釋$\frac{1}{6}$的意義為何？

S27：就是一點點啊！

題目是問「$\frac{1}{6}$盒有幾塊？」可是學生卻直接回答「$\frac{1}{6}$塊！」，不但無法正確用圖形表示，也無法解釋$\frac{1}{6}$的意義？因此，可確定該組不了解分數的基本意義。

2.受分子控制~兒童直接取「$\frac{1}{6}$」的分子「1」做為圖示的依據

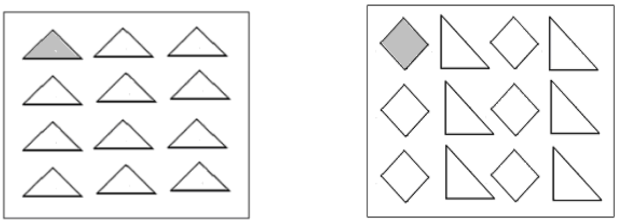


圖 5：S18 之表徵方式

原案一之二

T　：說說看你只有畫一塊的理由（圖 5）？

S18：$\frac{1}{6}$盒，上面是 1（指分子），所以就是取一塊。

T　：那如果是$\frac{2}{6}$盒應該畫幾塊？

S18：2 塊！

T　：那如果是$\frac{5}{6}$盒應該畫幾塊？

S18：5 塊！

T　：那如果是$\frac{6}{6}$盒應該畫幾塊？

S18：6 塊！

T　：請將$\frac{6}{6}$盒有幾塊？以圖示表之？

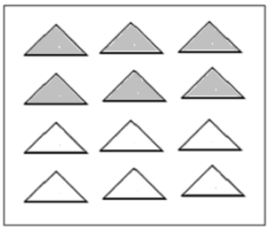
S18：

圖 6：S18 之表徵方式

T　：$\frac{6}{6}$盒是幾盒？

S18：$\frac{6}{6}$＝1；1 盒！

T　：1 盒應該有 12 塊，你為什麼只有畫 6 塊？

S18：(臉上露出疑惑的表情！)

該組學生對於分數的思考模式，一直以分子為中心。由於受分子主宰，因此，即使研究者不斷地變換分子的數字，可是該組學生只注意分子的變化，完全忽視分母的存在，顯示兒童並不了解分數的意義。

3.受分母控制有些兒童直接取「$\frac{1}{6}$」的分母「6」做為圖示的依據；

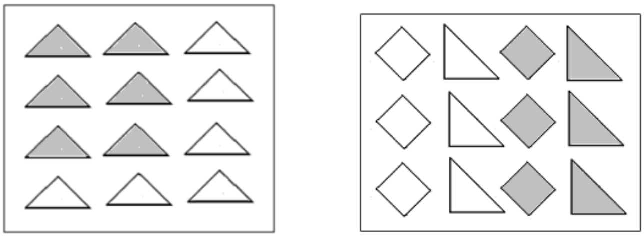


圖 7：S29 之表徵方式

原案一之三

T　：說說看你畫六塊的理由？

S29：$\frac{1}{6}$盒，分母是 6，所以最主要就是取六塊。

T　：那如果是$\frac{2}{6}$盒應該畫幾塊？

S29：$\frac{2}{6}$盒，分母是 6，所以最主要就是取六塊。

T　：那如果是$\frac{6}{6}$盒應該畫幾塊？

S29：一樣是畫 6 塊。

T　：$\frac{6}{6}$是多少？

S29：$\frac{6}{6}=1$

T　：$\frac{6}{6}$盒是幾盒？

S29：1 盒

T　：1 盒有 12 塊，但你只有畫六塊？

S29：(充滿疑惑表情！)

該組學生對於分數的思考模式，和上一組則完全相反，以分母為中心，即使研究者不斷地變換分子，以了解是否受到分母影響，結果不管分子數字怎麼變動，該學生還是以分母做為解題的依據，顯示該組學生並不了解分數的意義。

（二）缺乏子集合~集合之概念（P2、P6）

1.將分子和分母視為獨立兩個數

該組兒童分別將分子和分母視為二個獨立的數，無論內容物外形有無一樣，直接將$\frac{1}{6}$視為一個「1」和一個「6」之兩個獨立的數，並以此做圖示的基礎（如圖 8 ）為其解題的結果，完全忽略題目所問之意義與分數概念為何？

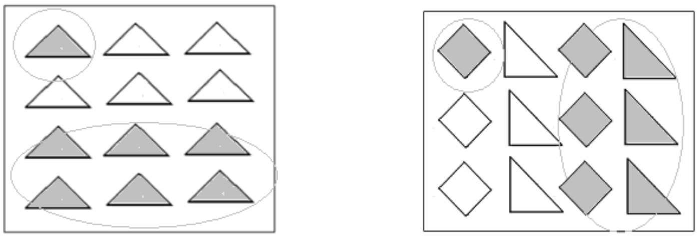


圖 8：S22 之圖形表徵方式

原案一之四

T ：說說看你這樣畫的理由？

S22：$\frac{1}{6}$盒？就是分成兩部分？上面是一塊，下面是六塊？

研究者發覺兒童只以分數之數字做為其圖示的依據，將分子與分母視為獨立的數字。為進一步確認其迷思概念，乃繼續追問：知不知道$\frac{1}{6}$之意義？

T ：那你會不會畫$\frac{2}{6}$盒？

S22：會！

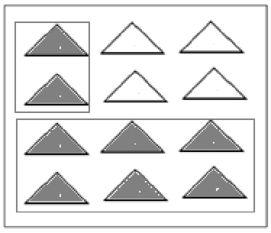


圖 9：S22 之表徵方式

T ：說一說你這樣畫的理由？

S22：上面是 2 所以畫二塊，下面是 6 所以畫六塊。

本組學生粗淺認為「$\frac{1}{6}$」是由「1」和「6」兩種數字所組成，但並不了解「1」和「6」中間的橫線所代表的意義。研究者也試著以$\frac{2}{6}$盒來進一步檢驗結果如圖 9，顯示該組學生無法釐清分數是「子集合~集合」間之關係。為了不影響課程進度以及

太早介入教學會影響學生解題思考方向，所以暫時不做立即介入，先試著讓其觀摩其他小組的發表結果再視學生了解的程度以決定介入時機。

（三）缺乏單位量概念（P3）

部分兒童知道$\frac{1}{6}$是六塊中的一塊，而忽略一盒中全部的 12 塊才是單位量：

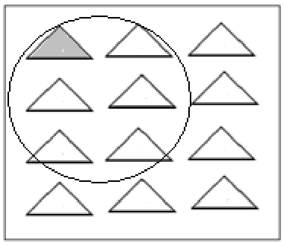


圖 10：S31 之表徵方式

原案一之五

T ：$\frac{1}{6}$盒有幾塊？

S31：1 塊！

T ：說說看你為什麼選 1 塊！

S31：因為是$\frac{1}{6}$盒，所以我先圈選六塊後，再從六塊中選一塊。因此$\frac{1}{6}$盒的答案是「1 塊！」。

這組學生由於忽略給定單位量是「一盒有 12 塊」，為了更進一步證明該組兒童在這方面的迷思，於是進一步的追問：

T：請你分別畫出$\frac{3}{4}$盒有幾塊？及$\frac{3}{9}$盒有幾塊？

S31：

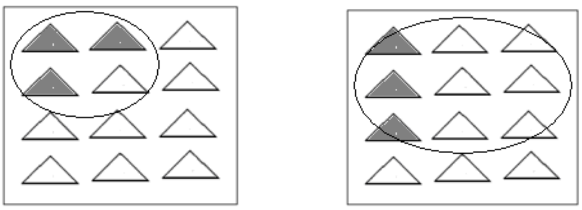
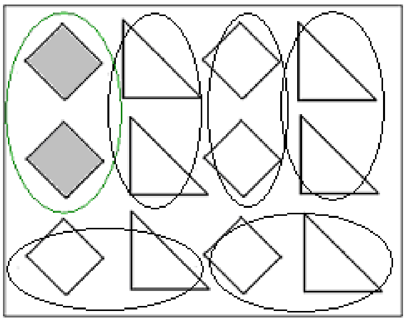


圖 11：S31 之表徵方式

兒童圖示結果更加證明研究者原先的想法，學生對分數的了解就是分子和分母所呈現的數字。因此可以確定該組兒童缺乏單位量的概念。

（四）缺乏等分概念（P7、P9、P12、P14）

當一盒內容物有不同形狀的東西時，例如：一盒裡面有 12 塊，6 塊正方形（4 號板）及 6 塊三角形（7 號板），問 $\frac{1}{6}$ 盒有幾塊？多數兒童除了習慣於利用演算法外，在圖形的表徵時會將十二塊分成六份，每份有二塊，只注意到「數」的等分，而忽略了「量」的等分。



（圖 4-3-24）

（原案二之七~課室發表之師生對話）

T　：說說看妳們這一組是如何圖示 $\frac{1}{6}$ 盒？

S10：我把它們分成六份，每份有二個。

T　：每一份的大小有沒有一樣？

S10：有！每份都有二個啊！

T　：你認為正方形和三角形有沒有一樣大？

S10：沒有！三角形看起來比較大！

這幾組學生，知道運用演算方式求出兩個，但在內容物不等的情況下，卻完全沒有考量內容物是否須相等的問題，只以數量「2」做為其圖示的基礎，隨意選取 2 個，但是卻忽略每一份之大小須相等概念。

二、活動中小六兒童之多元解題策略：

(一)善用圖形表徵方式解題（P8）

先將內容物做等分配：兩個一份、兩個一份，共六份取其中兩塊為一份。

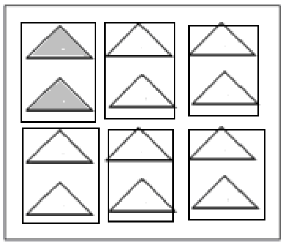


圖 12：S5 之表徵方式

原案一之六

T ：說說看你為什麼要這樣分？

S5 ：我先試著兩個分成一堆，剛好可分成六堆，所以$\frac{1}{6}$盒，是六份中的一份。

T ：你怎麼知道要分成 6 份？

S5 ：因為分母是 6，就必須將 12 塊分成 6 等份。

T ：那…一份是多少？

S5 ：2 塊！

T ：很好！

本組學生以心算方法將 12 塊分成 6 份每份有 2 塊，於是以圖示法，先以二塊圈成一份，剛好有 6 份所以就取其中一份，一份裡面剛好有 2 塊並成功解題。

（二）**以單位分量為基礎，以進行解題**（P5）

每六塊圈成一份而取其中一塊，剩下六塊再圈成一份而再取其中一塊，全部共二份，二份就共有二塊。

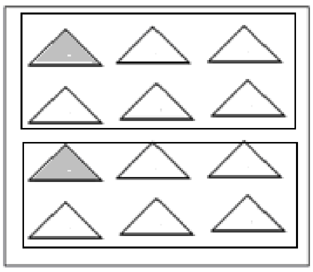


圖 13：S24 之表徵方式

原案一之七

T ：說說看你為什麼要這樣分？

S24：因為是 $\frac{1}{6}$ 盒，所以我先將 6 塊圈成一堆，每堆取 6 塊中的 1 塊，共有 2 堆所以是 2 塊。

該組小朋友先依分母將六塊分成一堆，分成兩堆後各取六塊中的一塊，因此得到答案。剛開始時，研究者覺得這組小朋友之解法蠻冒險。在剛好分完的情況下才可解題成功，若是在無法剛好分完的情況下，學生可能就無法使用這個方法了！於是研究者進一步追問：

（老師提另一問題）

T ：如果一盒有 9 塊，你如何圖示 $\frac{1}{6}$ 盒？

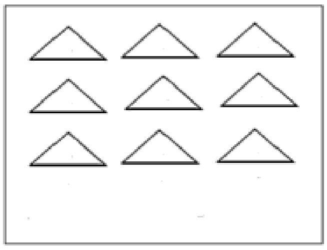
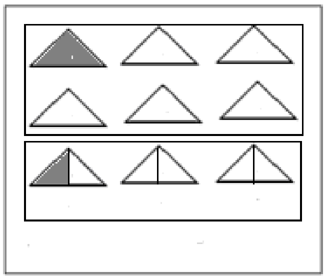


圖 14：S24 之表徵方式

S24：一樣可以用這個方法啊！

T ： 請你使用圖示畫看看！



S24：好！

圖 15：S24 之表徵方式

T ： 那知不知道這樣是幾塊！

S24：一塊半啊！

T ：那你用分數表示看看！

S24：$1\frac{1}{2}$ 塊啊！

T ：那你知不知道 $1\frac{1}{2}$ 塊是幾盒？

S24：全部有 9 塊，$\frac{1}{6}$ 盒就是 $1\frac{1}{2}$塊，也就是九塊中一又二分之一塊（$1\frac{1}{2}$）九塊中的每一塊又可切成二塊相等的小三角形，共 18 塊小三角形；一又二分之一塊等於三塊相等的小三角形。所以三塊小三角形是全部 18 塊小三角形的 $\frac{3}{18}$ 盒也就是等於 $\frac{1}{6}$ 盒。

T ：那你會不會用算式來算看看！

S24：會！全部有 9 塊，所以 $1\frac{1}{2}\div 9=\frac{3}{18}$ 盒$=\frac{1}{6}$ 盒

T ： 很好！兩種表示方法都正確！

該組的解法消除了研究者原先所擔心的問題，兒童不但能以計算的方式迅速求出答案，亦能以圖示的方式合理解釋其解題策略，同時以圖示方式連結分數表徵並利用等值分數概念詳細而且正確地說明其解題過程。

（三）利用除法進行解題（P11）

採用除法算式「12÷6＝2」求出每份的塊數，再利用所求出塊數去做為選取圖形的基礎。雖然一樣利用演算法求出答案，但卻能對其答案提出合理解釋。

原案一之八

T ：說說看你為什麼會採用 12÷6＝2？

S20：因為分母是六，所以要分成六份，因此我要先知道一份是幾塊？

T ：那一份是幾塊？

S20：二塊！

T ：你是指兩塊三角形或是兩塊四邊形？

S20：一塊是三角形另一塊是四邊形所以共二塊！

T ：圖示給老師看看！

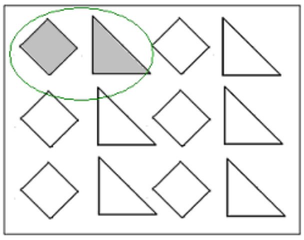
S20：

圖 16：S20 之表徵方式

為了避免上述所說的只單純注意單位量等分的問題，研究者必須進一步的探測兒童在幾何分割上的問題，於是再問這組學生；

T　：除了這種圖示外還有其他的方法嗎？

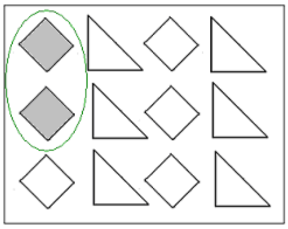
S20：也可以！

圖 17：S20 之表徵方式

T　：為什麼？

S20：正方形和三角形大小是一樣大的！

T　：為什麼一樣大你再說清楚一點？

S20：前次七巧板活動有做過，正方形和三角形都可分割為二個小三角形（五號板子），都是二個小單位，所以正方形和三角形大小是一樣的。

學生察覺到正方形和三角形的關係，並且知道其為異形等積的等量關係，對於一盒中內容物形狀不同的圖示表徵，能夠做出合理的解釋。

（四）利用分數的乘法進行解題（P13）

這幾組學生使用分數的乘法，先求出數量「$12\times\frac{1}{6}=2$」並能對其答案及圖示做出合理的解釋；

原案一之九

T　：說說看你為什麼會採用 $12\times\frac{1}{6}=2$？

S13：我們有學過分數的乘法！

T　：你們是否能解釋 $12\times\frac{1}{6}=2$ 的意義？

S13：全部 12 塊的 $\frac{1}{6}$ 就是 $12\times\frac{1}{6}=2$；所以是二塊

T　：圖示給大家看看！

S13：

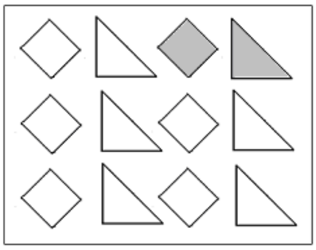


圖 18：S13 之表徵方式

T　：那如果這樣圖示（圖 19）你認為答案對不對？

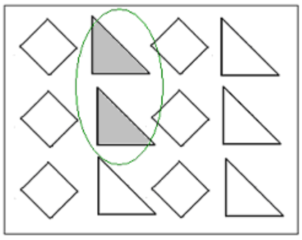


圖 19：S13 之表徵方式

S13：可以啊！雖然有六個三角形和六個正方形，其實它們大小都是一樣的！

T　：你確定一樣嗎？

S13：前次活動有做過三角形（7 號板）和正方形（4 號板）大小是一樣的。

T　：答對了！你們概念很正確！

同樣地，這組學生察覺到正方形和三角形的關係，並且知道其為等量關係對於不同的圖示表徵卻能夠做出合理的解釋，順利的解題成功。

在內容物一樣，外形不一樣，但剛好可分完的情境下，兒童所需考慮的向度增加，因此在解題方面之表現更是呈現多元且複雜。在分析兒童策略運用也需要多方面的注意，否則看似正確，如果沒有深入探討則無法發現其迷思。相反地有些兒童解題策略看似錯誤，如果沒有深入探討則無法發現兒童真正的想法，在資料的蒐集

中反而會錯失寶貴的機會。在研究過程中便發現以下的案例：

（五）面積保留概念之策略（P10）

十二個分成六份，每份有二個所以答案是

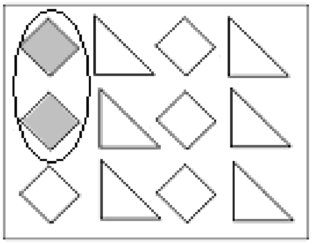


圖 20：S4 之表徵方式

上圖 20，因受前面幾組答題的影響，研究者直覺地以為兒童還是以數量做為圖示基礎，所以主觀認為是錯誤的答案。正如前面一些兒童，利用算式求出答案，之後便以數量做為其畫圖依據。但這組兒童卻勇敢站出來為捍衛自己的主張而將自己想法說出來，使原本看似錯誤的解題策略，卻因兒童能夠提出合理的解釋，並且能有效融入幾何概念中的面積保留概念，因而成功地解決問題。

兒童能夠對問題深入探討使研究者有所感觸：

其實老師原先預想的答案，$\frac{1}{6}$ 盒是一個正方形及一個三角形。因此，學生回答只選兩個正方形或兩個三角形。我直覺認為學生應該是個錯誤的想法。但是沒想到學生能提出合理的解釋。老師原先是打（×），但是該生能夠提出合理的解釋並且在課室發表中也提供班上對本題另一個思考的空間。老師不但要打（ v）而且還要鼓勵這組小朋友。（931109 教師手札）

原案一之十

S4：老師！這一題為什麼不對呢？

T ：你只有選二個相同圖形，這樣不對？

S4：老師！我本來也是要選一個正方形和三角形！

T ：那後來為什麼又選兩個相同的圖形？

S4：因為七巧板中正方形（4 號板）和三角形（7 號板）都可以分割為兩個相等

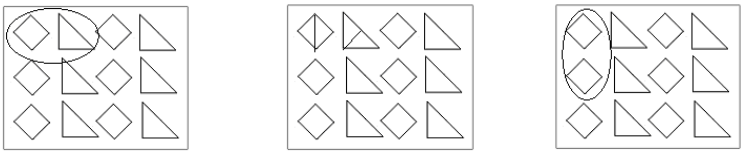
的小三角形，所以共有 24 個相等的小三角形，所以任取二個圖形通通等於四個相等的小三角形啊！前次七巧板活動也有做過呀！4 號板可以分割成 2 個 5 號板，7 號板也可以分割成 2 個 5 號板，所以正方形（4 號板）和三角形（7 號板）的面積是相等的。

T ：(老師沉默一下！) 有道理！你解釋得很好，你的想法很正確！

老師一路下來大部分學生的回答都是以數量做為圖示的基礎，受到前面學生答題的影響，所以也以為你們也是這樣想的！

兒童了解分數概念，亦能與相關單元有效的連結，並對於自己的見解有信心，因此能勇敢向老師提出質疑、經由辯證及討論的過程將自己的主張說明清楚，進而成功地捍衛自己主張。由 S4 學習日誌中可發現其多重解法：

（原案二之十五~兒童學習日誌）



正方形和三角形可分割 2 個小三角形，二個大小相等，所以只要任選二個都是$\frac{1}{6}$！（931116 學習日誌）

此評量活動兒童不僅提供了不同想法，也給研究者上了一課，再一次顯示「集思廣益」的道理。藉由這個機會研究者也希望該組兒童能將他們的想法介紹給班上的同學。

原案一之十一

T ：各位小朋友！（S4）這組同學有不同的想法，現在請他們向大家介紹？

S4：我們這組將七巧板中第五號板為單位量將正方形以及三角形進行等分割，六塊正方形及六塊三角形，每一正方形可分成二塊小三角形（第五號板子），每一中三角形可分成二塊小三角形，總共有二十四塊三角形（如下圖）。

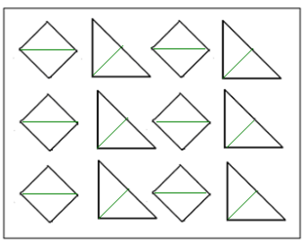


圖 21：S4 之表徵方式

所以$\frac{1}{6}$盒只要有四塊小三角形即可。

T ：各位小朋友，懂不懂這組小朋友的圖示呢？

S ：懂！（齊聲！）

在本評量活動後研究者更驚嘆兒童思考的潛能：

S4 家勇很清楚將正方形及三角形分別等於兩個小三角形，因此老師很清楚家勇的單位量等分割及單位量的概念相當清楚，從家勇的日記中老師更可發覺兒童解題的多樣性（931116 教師手札）

丁老師也有同樣的看法並建議：

看到兒童對於問題有這麼多的想法，是不是利用這樣機會讓他們互相比較一下說不定會有新的發現！

採用丁老師建議：

原案一之十二

T ：各位小朋友請安靜！現在看過各組所發表的解題方式，請大家再想一想，是自己或是別組的比較正確？

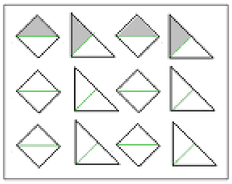
S ： S4！（很多小朋友異口同聲！）

T ： S32！你說說看為什麼？

S32： S4 的解法使我想到上次活動（七巧板連續量活動），只要正方形及三角形分別等於兩個小三角形，就可以知道面積是一樣，既然一樣那隨便取其中兩個就是答案了？

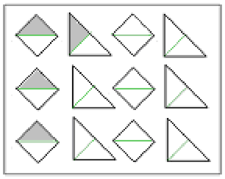
T： 很好！解釋很詳細！還有哪位小朋友想要說說看的！

S8：既然可以再細分那解法就很多了！

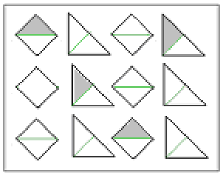
T： 你說說看！ 

S8：我們也可以這樣表示！

T： 可以！

S29：老師！也可以這樣！ 

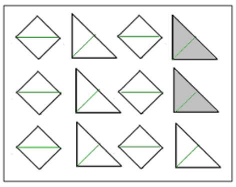
T　： 很好！

S19：老師！也可以這樣！隨便任點四塊小三角形。 

T　： 你們的頭腦真得都很棒，可以想出這麼多！

S25：細分成二十四個小三角形，只要任取四個小三角形就是 $\frac{1}{6}$ 盒？

T　： 沒錯！那妳也畫畫看！

S25：好！ 

在這組 S4 小朋友提出合理解釋並獲得老師加分後，激勵班上其他各組小朋友，不禁躍躍欲試想表達自己的看法，不同的解題策略一一產生。

看到 S4 的解題策略後，由於研究者疏忽兒童多元解題的周密性，也忽略部分兒童的豐富想像力，因此受了前面幾組兒童的解題策略影響，直覺的認為該生 S4 的想法會跟前幾組的兒童一樣，而沒有深入去探究兒童在解題過程中的一些想法。經由此項活動中使兒童有機會表達其不同看法，研究者也由兒童的觀點來校正自己在教學的疏忽，活動過程中許多疏忽而未發現問題時，卻因在豐富課室發表及討論

中一一呈現，無形中學童也學習到不同的解題策略並能修正自己的迷思概念，愈到最後愈可看到班上兒童在學習分數相關活動的成長，活動之後更加的確定兒童在分數概念上的穩固。

（六）將問題連結到生活情境~考慮到內容物是否同質的問題（P11）

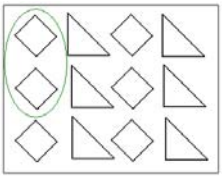
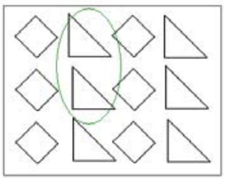
此部份也許超出國小階段數學領域能力指標的範圍，但該組兒童卻考慮到如果實物不同的問題，雖然超出預期，但是學生豐富的想像力，實在是超乎教師的想像。除了考慮內容物「形」的問題，更進一步想到真實生活情境中的「質」的問題。研究者請這組兒童上台報告，以提供學生另一個不同的思考空間。

原案一之十三

S21：老師我認為 S4 的解法有問題？

T　：那你說說看你的想法？

S21：其實若三角形是三明治，正方形是豆腐。

那這樣分就不正確了！ 

T：為什麼不正確，說說看你的想法！

S21：因為如果這樣分就只能吃到三明治或是豆腐了？

T：說說看，那你要怎麼分？

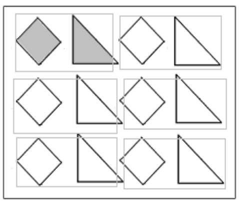
S21：應該要這樣分！

圖 22：S21 之表徵方式

先分成六組，每組都有一塊豆腐和一塊三明治，這樣每一組才會相等，最後再取其中的一組，所以 1/6 盒必須是六組中的一組也就是說要每組都有一塊豆腐和一塊三明治。

T　：你們考慮得很周到，觀察也很細心。但是本活動是配合前次七巧板活動，

所以請仔細再想一想！

S21：我知道了！我們想得太多了！

T　：為什麼？

S21：因為七巧板是用紙做的，既然是紙做的當然可以進行分割，只要分割成最小單位（如第五號板子），便可靈活運用各種組合求出答案。

這組小朋友提供另類更廣泛的思考模式，其實平時老師照本宣科，根本不會想到兒童思考空間是如此的寬廣，超乎老師的想像範圍。這組學生了解分數的意義，亦知道分數中的等分概念，並能將問題擴充到真實的情境中，思考的方向值得鼓勵。兒童能提出超出其能力範圍的見解，對兒童來說是一種創新的想法，也可以說是一種創造思考的能力，這種精神是值得鼓勵的。

學童將實際情境融入問題之中：

內容物不同形及同質性的問題可能對小六學生是有困難的，不只要考慮外形、幾何，單位量等分的問題，更需要考慮物質的性質，考慮的向度變多了，是否對釐清兒童的概念有幫助或者會對學生造成另一種思考上的干擾。我必須請教教授看是否有必要列入補充教材之中（931125 教師手札）。

兒童既然能於課室討論中，提出新的見解除了表示他們對於課程內容已相當了解外，進一步擴展到實際情境中更足以證明其已融會貫通，兒童所學習到「活」的知識，不但不會造成學習的干擾，反而有利於澄清不同情境的不同解題方式。而課室討論所帶給兒童間的互動及老師現場適時的引導，便是最好的補充教材（931206 研究參與者答）。

伍、　結論與反思

一、結論

分數的教與學的確是小學數學課程中最難的部份(Cramer, Post, & delMas, 2002; Southwell, 1985)；本研究顯示小六兒童在離散量之情境下，常見之分數迷思為：不

了解分數的意義、缺乏子集合~集合之概念、缺乏單位量概念以及缺乏等分的概念。這些教學中常見之問題與先前之相關研究結果（Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984； Cramer, Post, & delMas, 2002; Empson, 2003; Southwell, 1985）相一致。顯示教師教學時應加強設計相關之評量活動以協助兒童修正這些迷思概念。

本評量活動之結果顯示，在教師適當的引導與鼓勵下，可以激發兒童多元解題策略：如能夠善用圖形表徵以進行解題，以單位分量為基礎進行圖形組合與解題，利用分數的除法進行解題以及利用分數的乘法進行解題等策略。此正顯示教師教學時應多激發孩子發展不同的解題策略，畢竟孩子的想像空間是無限的（NCTM, 2000）。

二、反思

教師若願意隨時進行反思、嘗試不同的評量教學活動與方式是教師教學進步的原動力之一（洪素敏，2004）；以下分享活動後研究者之反思：

（一）藉由溝通與討論，可以分享不同的解題策略與豐富兒童的數學知識

Vygotsky(1978)認為在較有能力的孩子的引導下可以增加孩子的學習機會。此外，藉由溝通，小組討論與班級討論，不但可以分享不同的解題策略與澄清自己的想法；更可藉由合作學習與溝通中，讓不同程度的孩子有不同的學習機會(Artzt & Newman,1997; Johnson & Johnson,1992; Vygotsky,1978)。

（二）提供兒童安全發表的環境與自由思考的空間

教學中孩子若願意發言，那麼教學就成功一半了；本研究之研究者不但鼓勵孩子發表與解釋他們的想法與作法，更給予學生時間與空間去思考和討論問題。這不但讓教師有更多的機會去發現與瞭解孩子的學習問題，進而協助學生發展正確的數學概念。

雖然這只使很單純的離散量教學活動，但小小的活動中卻蘊藏著學生豐富的想像力與解法。藉由課室討論的溝通，學生不但能修正自我的迷思概念，亦能從其他同學的不同解法中去評析、察覺與比較策略的不同，再經由質疑、辯證中使自己的數學概念更加穩固，而教師更可以在師生互動中，發現孩子的想法與迷思，以修正

教學策略。

參考文獻

林福來、黃敏晃(1993)：分數啟蒙課程的分析、批判與辯證，**科學教育學刊，1**(1)，1-27。

林福來、黃敏晃、呂玉琴（1996）：分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。**科學教育學刊，4**(2)，161-196。

洪素敏 (2004)：國小五年級學童分數迷思概念補教教學之研究，國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文。

甯自強（1997）。量的子分割（三）~真分數的引入~。*教師之友，38*(4)，33-39。

劉秋木（1996）。*國小數學科教學研究*。台北：五南。

Artzt, A. F. & Newman, C. M. (1997). *How to use cooperative learning in the mathematics class*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., & Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 323-341.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., & Post, T. R.(1988).Construct a sum : A measure of Children's understanding of fraction size. *Journal for Research in Mathematics Education,16*(2), 120-131.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth-and-fifth grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education, 33* (2), 111-144.

Empson, S. B. (2003). Low-performing students and Teaching fractions for understanding: An interactional analysis, *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(4), 305-343.

Hiebert, J. & Tounessen, L.H.（1978）：Development of the Fractions concept in two physical contexts : *An Exploratory Investigation Joural for Research in Mathematics*

Education.374-378.

Johnson, D. W., & Johnson, F. (1992). Joining together: Group theory and group skills(4th ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1960). *The Child's Conception of Geometry.* (pp. 32-335) New York: Basic Book.

Southwell, B. (1985). The development of rational number concepts in Papua, New Guinea. In A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.),Theory, Research, and practice in mathematical education. Nottingham, England: SCME., University of Nottingham.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mine in society：The development of higher psychological process*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

A Study of Sixth Graders' Misconceptions and Problem Solving Strategies of Fractions

Zhi-Xu Huang[1] Der-Ching Yang[2]

[1]Yunlin County Tai-xi Public Elementary School

[1]Graduate Institute of Mathematics Education, National Chiayi University

Abstract

The purpose of this study was to investigate the misconceptions and problem solving strategies of fractions for discrete quantities. Therefore, 32 students from a middle-sized elementary school of Yunlin county were selected to join this study.

Results indicated that four different fractional misconceptions were found which included: 1).without understanding the meanings of fractions; 2).without recognizing the relationship between subset and set and 3).lacking the concept of unit. At the same time, four different strategies were used in the class. These included 1).using benchmark appropriately; 2).using the smallest grid as a unit; 3).selecting the appropriate unit as a benchmark and 4).using real measuring method to solve problems.

Key words: Sixth graders, discrete quantity, fraction.