

國小五年級學童在數感教學活動表現之研究

曹雅玲

台北市立教育大學數學資訊教育學系助理教授

阮麗蓉

台北市南門國小教師

(投稿日期：95年11月20日；修正日期：95年12月12日、96年3月26、4月9日；接受日期：96年5月4日)

中文摘要

本研究的主要目的是探討國小五年級學童在數感教學活動中數感發展的情形，以及如何透過教學活動發展學童的數感。本研究屬質性研究，設計適合的數感教學活動，並透過教學活動討論學童數感發展情形，研究結果發現，學童在教學活動中對數字有更多的認識，同時也對數字與運算的關係有更敏銳的了解，且更能彈性思考靈活運用解題策略，運用後設認知能力進行合理的判斷。不同數感程度的學童，解題時所採用的策略也會不同，而數感教學活動確實能促進學童數感能力的發展。

關鍵詞：數感、五年級學童、個案研究

壹、研究背景與研究目的

美國數學教師協會（NCTM,1989）在小學數學教育的發展重點當中提到，在數字部分，應加強數感。之後（NCTM,2000）則明確指出，在小學階段，發展數感是數學教育中的核心課題之一，強調數與計算（Number and Operations）這個課程標準的核心內涵，就是發展數感的能力。在台灣，九年一貫課程數學學習領域的課程目標中談到，國民小學第二階段（四至五年級）的目標為能熟練非負整數的四則與混合計算，培養流暢的數字感（教育部，2000）。我們可以發現數感已被列入數學教育的學習重點。數感強調有意義的學習，我們知道鼓勵學童有意義地學習，提供學童探測問題的空間，讓學童有思考的機會，從討論的環境中發展與修正自己的觀點，建構屬於自己的知識，讓學童成為自己學習的主人，是數學教育中重要的一環（林宜蓓，2001）。在教學過程中，許多時候，不難發現有數學成就的學童，並非個個都擁有較好的數感。而根據許多關於數感的研究也顯示，學童具有良好的筆算能力並不代表他們就能發展良好的數感（楊德清，1998, Reys & Yang,1998）。

因此，如何運用有效的教學策略提升兒童的數感，成爲目前數學教學上重要的課題。因此本研究的主要目的是探討國小五年級學童在數感教學活動中數感發展的情形，以及如何利用所設計的教學活動發展學童的數感。希望研究結果將可提供重要資料，幫助處於教學現場的教師了解對學童數感的發展，透過適當的教學，提升學童數感。

貳、文獻探討

一、數感的意義與重要性

Trafton (1989) 提出數感是一種對數量的直覺與洞察力，雖然數字不是正式的實體，然而卻能對數字做出自然的反應。Howden (1989) 談到數感是一種對數字的特殊感覺，是人如何與他人和周遭世界產生關聯的直覺能力。NCTM (1989) 所公佈的數學課程與評量標準中，談到數感是根據數所代表的不同意義，產生對於數的一種直覺。Howden (1989) 以及 McIntosh, Reys and Reys (1992) 也談到，數感是一種對數字的直覺，能將數字做各種的運用，並且在計算時能考慮不同層面的正確性，察覺運算時的錯誤，以及合理的使用數字的常識。數感所關注的是它的直覺本質 (intuitive nature)，它是漸進性的發展，表現在多種方式上 (Reys, B., 1994; Reys et al., 1991; Sowder, 1992)。許清陽 (2005) 認爲數感強調對數字的直覺感覺，以各種不同形式的數字了解方式做數學上的判斷，並能運用有效的策略來處理所面對的數字情境。Sowder (1988) 認爲數感是一個使人能連結數字與運算概念的良好組織概念網，可用於比較數字大小、數字的相對與絕對、對數字做質與量的判斷、辨認計算結果的不合理、以及使用非算式型態去心算。

Behr (1989) 提到數感是彈性操作量的心靈表徵，並在各種表徵之間轉換的能力。McIntosh, Reys & Reys (1992) 認爲數感是一種能夠使用數字與數量來溝通、處理、陳述訊息的能力。數感是個人對數字和運算一般性的理解；並且能夠運用彈性的方法去使用這種理解來作爲數學判斷和發展有用及有效的策，以解決數學問題 (McIntosh, Reys, Reys, Bana & Farrel, 1997)。許多先進國家強調有意義的學習數學，逐漸重視數感在數學教育中的培養。美國國家研究會 (NRC, 1989) 主張數感教學爲小學數學教育的主要目標。美國數學教師協會 (NCTM, 2000) 強調發展數感是數學標準的核心。澳洲教育研究中心 (AEC, 1991) 也認爲數感教學是中小學數學教育中不可缺少的主題。

二、數感的內涵

大部分的數學教育學者，都同意數感的重要，而數感並非單一的課程主題，它包含許多面向。許多學者依據本身對於數感的定義，提出各自的主張，彙整與本研究界定的數感內涵相關學者的看法(許清陽、楊德清、李茂能，2001；NCTM,2000；楊德清，1997，1998，2000)，加以整理將數感內涵的分類如下，作為本研究數感表現的理論依據及設計教學活動的主要目標：

(一)理解數字的意義、了解數字間關係的能力：

1.瞭解數字的基本意義與數字間的關係

Sowder和Schappelle (1989) 認為瞭解數字的基本意義是建立數感能力中最重要的一個因素。而瞭解數字的基本意義與數字間的關係包括數字（正整數、分數、小數）所代表的意義及數字間的結構關係。例如：知道0.1的一半應該是0.05。

2.能使用數字的合成與分解

擁有良好數感的人知道如何藉著合成、分解與其他方式來轉換，以利於問題之處理 (Greeno,1991)。例如：能將1.98分解成1+0.98，而 1.98×35 可以想到 $1 \times 35 + 0.98 \times 35$ 。

3.能在不同的表徵間做轉換

瞭解數字能以不同的形式去表達與呈現。例如：0.8可以表示成80%， $0.25 = \frac{1}{4}$ 。

(二)辨別數字大小的能力：

1.比較、排序數字

能比較數字（包含正整數、分數、小數）之大小，例如：知道 $\frac{1}{2}$ 大於 $\frac{2}{5}$ 。當給予一串數字時，能依數字的大小排列出適當的順序，例如：0.1、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{4}{5}$ 、1。

2.理解並運用數字的稠密性

能說明數字的稠密性，以分數或小數的稠密性來說，是指在兩個分數或兩個小數之間含包含著無限多的數，例如：能說明 $\frac{2}{7}$ 與 $\frac{3}{7}$ 之間有無限多的分數。

(三)瞭解運算與數字之關係的能力：

1.了解運算對數字所產生的影響

了解運算在不同的數字系統及不同情境下所產生的影響。NCTM (1989) 提到運算的理解涉及關於兩個數字運算影響的直覺。例如：學童可以了解三位數加三位數時，結果

可能為三位數或四位數。

2. 了解數字改變後，對運算結果的影響

能知道當數字或運算符號改變時，對運算結果會有什麼影響。例如： $14 \times 13 > 12 \times 14$ 。

(四) 彈性運用解題策略與判斷答案合理性的能力

1. 選擇適當的解題策略

學習數學的主要目的之一是在解決問題，因此應針對不同情境選擇適合的解題工具。例如：在比較 231×5 和 $230 + 231 + 232 + 233 + 234$ 大小時，能不透過計算兩式之運算結果，進而進行比較。

2. 判斷答案是否合理

問題解答應符合情境，在不同的情境下，應做適當的抉擇，決定適當的答案。例如：

不可能有 0.5 個人， $\frac{4}{7}$ 本書。

(五) 使用參考點的能力：

1. 利用參考點進行估算

參考點可以提供了學童在作思考時的一種參考指標。在進行估算時，可以利用近似值代替實際值作為參考指標。例如：以 500 代替 499 判別 499×4 會接近 2000。

2. 利用參考點作為檢驗其他數字的依據

能使用參考點判斷計算大小。例如： $\frac{3}{5}$ 超過一半， $\frac{4}{7}$ 也超過一半，所以 $\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$ 會大於 1。

三、數感的教學活動相關研究

根據許多研究歸納發現，在所有與數相關的數學學習及教學都強調建立數感；數學是一種分享式的智慧學習，教室討論有助於數感的提升；學童在數感教學比在傳統的教室環境下學習到更多的數學 (Markovits、Hershkowitz & Bruckheimer, 1989；林宜蓓, 2002；楊德清, 2002)。以下彙整學者對數感教學活動所提出的看法：

Thornton 和 Tucker (1989) 認為要發展學童良好的數感，必須以日常生活實際經驗為例，建構數字的意義、數字間的關係及數字與運算間的關係。而數感是逐漸發展而成的，若能不斷地將數感融入教學，便能自然的發展數感。Gurganus (2004) 為了促進學童小學階段的數感發展，提出了 20 種促進數感的方法：(1) 從有意義的物件中舉出成

對的數(2)利用語言逐步地將數與符號結合(3)以數數活動作為的暖身活動(4)延伸數數活動至其他的數字規律(5)提供使用數線的經驗(6)提供估算的經驗 (7)使用數字表 (number charts) (8)使用各種與數相關的具體物(9)閱讀數學書籍 (10)設計魔數方塊 (11)運用不同的表徵表達相同的數值(12)實際測量並做測量估計(13)探索較大的數及它的表徵(14)資料的收集與繪圖 (15)研究不同文化下，不同的數字表徵(16)列出方程式(17)解題並評斷答案的合理性 (18)發現日常生活中常使用到的數字(19)探索常用的數 (20)營造數與數字規律的樂趣教師是讓學童對數學感到好奇及對數學感到興趣的主要關鍵，因此要讓學童持續學習並且感到數字的有趣。

NCTM (1991) 在「數學教學的課程標準」(Professional Standards for Teaching Mathematics) 中提到，數感的教學可以從三方面來規劃：

- (1)課程內容要生動活潑有趣、充滿挑戰。
- (2)形成一個探索並能建構知識的學習環境。
- (3)藉由課程內容和教學環境形成班級討論。

由以上敘述可知，學者們普遍認為數感的發展與提升，不只靠一套設計完善的教材就可達成，如果能使數學有意義，並與生活緊密結合，多鼓勵學童由操作中建構數學知識，同時提供學生足夠的討論經驗，便能逐漸提升學生的數感。因此，這些教學原則為研究者提供教學活動教材之參考。

參、研究方法

一、研究設計與流程

本研究屬質性研究，主要目的是利用數感教學活動進行個案研究，探討六位不同數感程度的國小五年級學童，在教學中的數感表現情況，設計適合發展學童數感的教學活動，並討論其在教學活動中數感發展情形。以下就此研究設計進行說明：

第一階段是針對 149 位國小五年級學童進行「高年級數感評定量表」之線上測驗，只挑選六位學童作為個案研究對象。第二階段是針對個案研究對象實施數感教學活動，由於數感教學活動只能利用課後時間進行，所以只選取願意參與活動的個案。研究者先對所任教之學校中所有五年級學童進行「國小高年級學童數感評定量表」之線上測驗。依據數感評定量表測驗之得分，將所有施測之學童分為高程度(前 27%)、中程度(中間 46%)、低程度(後 27%)，再分別從高程度、中程度及低程度挑選兩位學童，共六

位學童，經家長及學童本身同意後，作為本研究之研究對象。

本研究採參與式觀察 (participant observation) 方式進行，研究者實際參與所觀察的環境，由研究者實際進入教學現場教學，討論學習式的教學活動直接與研究對象互動，以獲得最真實的資料。研究者蒐集相關文獻，依據文獻中有關數感之相關內容，配合九年一貫數學課程，界定數感之向度，並編製數感教學活動。**透過教學活動中之觀察及實施教學中之訪談內容及教學前後個別的試題訪談內容與結果，來呈現國小五年級學童數感的表現及發展。**

二、個案學童的背景資料

本研究之對象是以協同研究者所任教之台北市區的某所學校，於九十四學年度就讀國小五年級五個班級學童中，依據數感能力測驗成績，選取六位學童作為研究個案，成績由高至低編成代號 H1、H2、M1、M2、L1、L2。其中，H1、H2 表示為高程度的學童；M1、M2 表示中程度的學童；L1、L2 表示低程度的學童。該群學童自九十學年度入學起，即接受九年一貫數學領域課程。個案學童的背景資料是來自於家長及他們歷年來導師的意見與看法、教學活動時的觀察，以下將就六位個案學童的背景資料作為敘述：

(一)個案學童 H1

H1 學童是個頭腦靈活、聰明活潑的男生，非常喜歡數學，平常上課時不懂的地方會提出問題，喜歡發表自己的想法。雖未曾補習過數學，但數學成績一向名列前茅。

(二)個案學童 H2

H2 學童是個聰明、愛玩不喜歡上課的女生，未曾參加任何補習，平日所有課業皆在學校完成，回家之後便不再接觸任何有關課業的書籍，但課業成績卻能維持高程度。

(三)個案學童 M1

M1 學童是個活潑好動、不愛寫字的女生，一向認為自己數學能力很好，對數學非常有信心。當遇到會解答的數學問題，會馬上露出感興趣的表情，也總是可以很快找出答案；一旦遇到較複雜無法立即解決的數學問題，就容易在短時間之內放棄思考。

(四)個案學童 M2

M2 學童是個用功且認真的女生，對於自己的數學能力非常沒信心，屢次向研究者表示自己數學頭腦不好，不適合作為研究對象。平時在校之數學成績屬於中等程度。在教學活動中，M2 雖然常常思考不出答案，但卻不會因此放棄思考，即使遇到較複雜能理解的題型，也不會失去學習的興趣。

(五)個案學童 L1

L1 學童是個活動中容易受同儕影響的女生，在學校的數學成績屬於中下程度。在訪談中，會表達自己的想法，在教學活動中，大多是經研究者要求才主動發言。

(六)個案學童 L2

L2 學童是個對學習缺乏熱誠的女生，因此在課業上屬於低成就的學童，在所有研究個案中，亦屬於數感表現最差的學童。在教學活動中，時常無法專心。

四、研究工具

數感評定量表

研究者以 e-mail 方式取得許清陽本人同意後，研究中採用許清陽、楊德清、李茂能（2001）所編制之「國小高年級數感評定量表」共有 37 題單選題，題目分為「瞭解數字的意義和關係的能力」、「辨認數字大小的能力」、「瞭解運算對數字的意義和影響的能力」、「發展計算策略與判斷答案合理性的能力」、「以多重方式表徵數字的能力」五大向度，每一向度題數皆有所不同（如表 1）。在信度方面，總量表的內部一致性信度的 α 係數為 0.8890，而各分量表的 α 係數分別為 0.6322、0.7799、0.6437、0.6008、0.6210，重測信度為 0.894，具有良好的信度。效度方面，此量表建立了經過楊德清、許清陽、李茂能三位在數感研究專長的研究者發展出此量表具有內容效度、專家效度。

本研究中，為避免學童紙筆計算影響測驗結果，因此數感評定量表採用線上測驗方式實施。研究者以許清陽（2001）「國小高年級數感評定量表」之題目編製線上測驗，學童點選完基本資料後，即進入線上試題開始作答。每題作答時間為 40 秒，讓學童依據自己對數字、運算及兩者關係的認知，選擇最適合的答案。為避免學童看到別人的答案，試題以隨機方式呈現，一次僅出現一道題目，當受試者以滑鼠點選答案確認或作答時間超過 40 秒，就會出現下一題，直到完成整份量表為止。

表 1 數感評定量表之雙向細目表

數感向度	題號	題數
瞭解數字的意義和關係的能力	1~5	5
辨認數字大小的能力	6~14	9
瞭解運算對數字的意義和影響的能力	15~24	10
發展計算策略與判斷答案合理性的能力	25~31	7
以多重方式表徵數字的能力	32~37	6

數感教學活動

研究者本研究所發展出數感的五個內涵，參考學者對數感教學活動所提出之看法，收集相關數學活動資料，並與具有專長的教師討論後，加以修改，設計成符合本研究目的之教學活動，希望藉由教學活動提升個案的數感。

Sowder 和 Schappelle (1994) 認為數學是一種分享式的智慧學習，而教室討論有助於數感的提升。本研究所進行之教學活動採合作討論學習方式進行，教師扮演引導者的角色，營造數學的學習氣氛，讓學童透過教師指導與同儕的互動討論，學習解決問題的方法。教師先向學童提出問題並要求學童一同解決，以學童的表現為基礎提出進一步的問題，用以釐清學童的思考方向及解題方式。這種教師與學童、學童與學童間彼此的互動，持續到教師提出其他問題或教學時間結束為止。希望藉由互動中，深入的瞭解國小五年級學童對問題之理解程度以進一步探究學童之數感能力，並藉由活動提升學童對數學的興趣及數感能力。

研究者參考各學者對數感教學活動所提出之看法，收集相關數學活動資料，設計了15個促進學童數感的教學活動（如表2），以下將就所設計之數感教學活動舉其中兩個活動進行說明。

1. 超級比一比（如附錄一）

此活動乃是延續「數字王牌」活動，繼續使用撲克牌來代替數字的呈現。活動中，要求學童隨機抽取三張牌，將此三個數字組成分數乘以整數的形式，並使其乘積為最大。讓學童透過操作，促進「辨別數字大小」、「彈性運用解題策略與判斷答案合理性」的能力。

2. 神奇百數表（如附錄二）

Howden (1989) 認為教師應該使用具體物來幫助學童探索，透過有規律且適當的排列，學童可以從中發現數字間的關係。Gurganus (2004) 提到使用數字表可以促進學童的數感。在此教學活動中，教師先把101~200的百數表上十位數數字與個位數數字相加和為10的數字做上記號，讓學童透過觀察發現這些數字共同的規則，進而了解數字間的關係。接著要求學童設計自己的規則，讓其他學童透過觀察找出規則。藉此培養學童「理解數字的意義、了解數字間關係」的能力。

表 2 數感教學活動分析

活動名稱	數感相關內涵	活動資料來源
數字王牌	◎彈性運用解題策略與判斷答案合理性	改編遊戲推理數學（四）（2005）、數學樂翻天第一集

	◎使用參考點	(2005)
超級比一比	◎辨別數字大小 ◎彈性運用解題策略與判斷答案合理性	改編遊戲推理數學(四) (2005)、數學樂翻天第一集 (2005)
傑倫的時間安排	◎理解數字的意義、了解數字間關係 ◎彈性運用解題策略與判斷答案合理性	改編看誰在說謊?(2005)
凱蒂的數學頭腦	◎瞭解運算與數字之關係	改編數學偵探(2003)
惱人的 99999	◎瞭解運算與數字之關係	改編遊戲推理數學 4 (2005)
神奇百數表	◎理解數字的意義、了解數字間關係	改編數學樂翻天第一集(2005)
誰吃的多	◎理解數字的意義、了解數字間關係 ◎瞭解運算與數字之關係 ◎彈性運用解題策略與判斷答案合理性	改編 101 個數學問題(2003)
看誰在說謊	◎瞭解運算與數字之關係	改編數字遊戲王國(2003)
月曆魔方陣	◎理解數字的意義、了解數字間關係 ◎使用參考點	改編數字遊戲王國(2003)
哪個加號錯了	◎辨別數字大小 ◎瞭解運算與數字之關係	改編 101 個數學問題(2003)
少了幾頁的書	◎理解數字的意義、了解數字間關係	改編有趣的數學推理(1999)
靜香的右手玄機	◎瞭解運算與數字之關係	改編有趣的數學推理(1999)
解救古家人	◎彈性運用解題策略與判斷答案合理性	改編數學偵探(2003)
誰的話最值錢	◎理解數字的意義、了解數字間關係	改編數學樂翻天第一集(2005)
禮物危機	◎彈性運用解題策略與判斷答案合理性	改編數學偵探(2003)

訪談試題

訪談工具包括教學前之訪談(pre-interview)及教學後之訪談(post-interview)兩部份。訪談的試題(附錄三)參考「數感評定量表」之試題設計,訪談試題皆為十四題選擇題。接受訪談之學童除選出正確答案外,還必須說明理由或舉例說明。訪談的目的是

希望藉由與學童之互動中，深入的瞭解國小五年級學童對問題之理解程度，以進一步探究個案學童之數感能力與發展情形。在訪談中的過程中，為避免引導學童回答問題的方向，研究者儘量不去詮釋學童回答問題的內容，避免讓學童只回答「是」或「不是」，而是以傾聽和鼓勵的方式，來實施訪談，每次訪談之時間約為30分鐘。

五、研究者的背景與角色

第一作者為是數學教育師資培育者，在本研究中是研究問題的發動者及理論指導者的角色，也參與教學活動設計、參與觀察及整理與分析。除到現場觀察教學外，並與實施教學研究者討論教學的實際問題，針對學生的學習過程與結果提出見解，在資料分析時，也參與檢驗教學過程分析的適當性。第二作者為現職國小教師，任教至今邁入第四年，是本研究中的教學者，也共同擔任教學活動設計、參與觀察、訪談者和教學者的角色，負責收集各種資料，與第一作者討論教學歷程。

六、資料蒐集

在本研究中，資料蒐集的主要來源為教學活動之錄影及文件分析，透過使用訪談、觀察、文件記錄分析的綜合，研究者就能夠利用各種不同的資料來源，以檢驗和雙向檢測分析結果。研究者在學童發表意見的過程中，同時了解他們數感的表現。研究中的文件記錄指教學者的教學手札、學童在教學活動中的討論單、數感教學活動中的學習單……等，目的是用來多方面分析國小五年級學童數感表現。

七、資料分析

訪談過程及教學活動過程以同步錄音錄影的方式做紀錄，作為本研究之資料蒐集的方法。無論是錄音或是錄影紀錄，事後轉譯成文字記錄，轉譯內容包含研究者與研究對象間的對話及互動。本研究中訪談在教學過程中進行，活動中藉由研究者的引導，引發學童與教師對話、交換意見。研究者在學童發表意見的過程中，同時了解他們數感的表現。為了使所得資料更有系統以利比對，研究者將所蒐集資料加以適當的整理及編碼，並重複矯正組合及考驗資料，以求有整體的分析詮釋。而訪談及教學活動之錄音錄影紀錄，皆在結束後轉譯成文字記錄。茲將文字記錄中出現之編碼代號及意義詳列於表 3。其它文件記錄在詮釋的過程中，研究者將提出說明作為輔助，不另行編碼。

表 3 文字記錄編碼代號及意義

編碼代號	編碼所表示的意義
師	代表研究者
生	代表研究對象
H1、H2	代表數感測驗中高程度第一位及第二位學童
M1、M2	代表數感測驗中中程度第一位及第二位學童
L1、L2	代表數感測驗中低程度第一位及第二位學童
()	代表表情或動作
...	代表停留一會
.....	代表停留很久的時間
(.....)	代表刪除中間對話
20060322 教(A)	代表 2006 年 3 月 22 日 A 教學活動轉譯文字記錄

肆、研究結果與討論

研究者為發展學童之數感能力，針對研究所界定數感內涵設計了15個教學活動，本節將就學童在教學活動中，師生間的對話或及互動、及分析教學前、後學童在數感訪談試題中的表現來探討學童在教學前後之數感表現來討論如何透過教學活動促進學童數發展數感。由於學童在教學活動中的數感發展，可能發生在學童本身思考問題解答的過程中，亦可能發生在研究者引導學童思考的過程中。由於篇幅的因故，所以在每個內涵中挑部分的學童數感發展情形加以討論，發展活動加以說明。

一、學童在教學活動中之數感表現

1、理解數字的意義、了解數字間關係

在研究者為提升學童「理解數字的意義、了解數字間的關係」的能力，所設計之6個教學活動包含「神奇百數表」、「傑倫的時間安排」、「誰吃的多」、「月曆魔方陣」、「少了幾頁的書」、「誰的話最值錢」。在「神奇百數表」教學活動中，學童透過觀察，除L2學童外，其他學童都能發覺百數表上數字間的關係。顯示大部分學童在此活動中，「瞭解數字的基本意義與數字間關係」能力獲得發展。

20060329 教（神奇百數表）

師：每個人手上都有一張百數表，上面的數字是從 101~199，其中有幾個數字的字體跟其他數字特別不一樣，請問你們這些字體跟別人不一樣的數字有什麼特別的關係嗎？

L1：它的個位數，以個位數來看的話差 1，以十位數來看也是差 1，然後百位數都一樣。

M1：(指著 119、191)這兩個加起來 310，(指著 128、182)這兩個加起來 310，(指著 137、173)這兩個也是，(指著 146、164)這兩個也是。

(……………)

H1：老師，我知道了，我這個很深奧。如果我們把有作記號的那條斜線將百數表分成兩部分的時候， $192-181=11$ ， $193-171=22$ ，依此類推，一百九十幾這橫排分別減掉一多一的這一直排，會是 11 的倍數。

「傑倫的時間安排」活動中，在分組討論的過程裡，M2 學童經研究者引導之後，能知道 $\frac{1}{3}$ 小時是 20 分，顯示其在「瞭解數字的基本意義與數字間關係」上有成長。透過活動，H1、L1 及 M1、M2 學童在討論記錄單上能清楚的將時間分配情形畫在數線上（如圖 1、圖 2），顯示學童在時間與數線表徵間做轉換能力獲得發展。

20060329 教（傑倫的時間安排）

M2：老師， $\frac{1}{3}$ 個小時是多少分鐘？

師：一個小時是多少分鐘？

M2：60 分。

師：那 $\frac{1}{3}$ 呢？

M2：20 分。

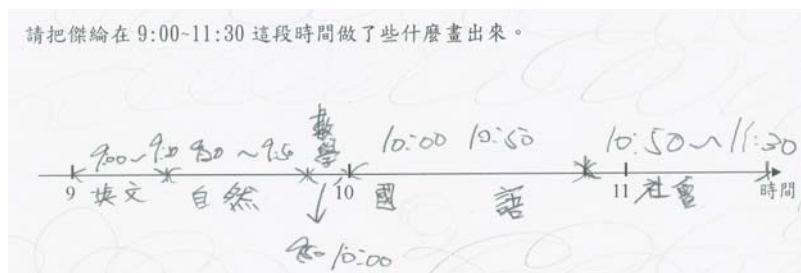


圖 1 「傑倫的時間安排」討論學習單 (H1、L1)

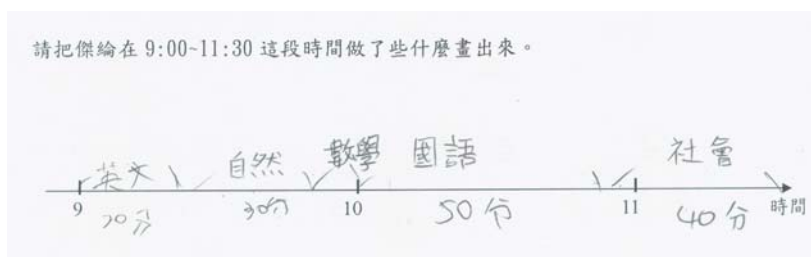


圖 2 「傑倫的時間安排」討論學習單 (M1、M2)

「誰吃的多」雖是以讓學童體會分數乘法的交換性為主，但由於學童未曾學習過分數與分數的乘法，經學童分組討論後，改由以畫圖方式作答。因此除學童在討論過程中，試著以繪圖（如圖3）方式作答外，研究者在解說時，利用繪圖方式來表達，同時促進

學童在分數符號及圖象間不同表徵間做轉換的發展。



圖3 「誰吃的多」活動中學童以繪圖作答

20060412 教（誰吃的多）

師：假設，這個長方形是一塊蛋糕。四分之三個蛋糕，是不是把蛋糕分成四等分，然後取其
其中的三份，所以四分之三的蛋糕，是不是就是我畫斜線的地方？

生：嗯。

師：再來，題目告訴我們，四分之三的蛋糕吃了其中的多少？

生：三分之二呀。

師：嗯，三分之二，所以我們是不是應該把四分之三的蛋糕，再切成三等分，然後再取其
中的兩份。所以阿麗吃的是不是應該是這塊？就是有畫紅色，綠色斜線的這塊？

(……………)

師：好，我們現在來看一下阿德的喔！該怎麼畫呢？

師：題目說，三分之二的蛋糕，阿德吃了其中的四分之三。同樣大小的蛋糕，三分之二是
不是把蛋糕分成三等分，然後將其中的兩份畫上斜線，有畫斜線的地方，就是三分之
二了。

師：再來呢？該怎麼做？

H2：三分之二的四分之三，就是把剛剛畫斜線的部份，再分成四等分，然後四分之三，指
的就是這裡，也是12小塊。

在「月曆魔方陣」教學活動中，利用日常生活中的月曆，探討魔方陣中的數字關係及數字和。在探討魔方陣中的數字關係時，透過觀察H1、L2學童發現「直的每個數字都差7」（如圖4），H2、M2學童發現「上+7=下」、「左+1=右」、「斜+6=斜」（如圖5），M1、L1學童發現「斜縣兩條加起來=42」、「直、橫加起來=42」（如圖6），顯示此活動讓學童發展了瞭解數字的基本意義與數字間關係。而研究者在指導學童計算魔方陣的數字和時，以中心數字為基礎，引導學生思考數字的分解，使得H1、L2學童發展使用數字的合成與分解的能力。

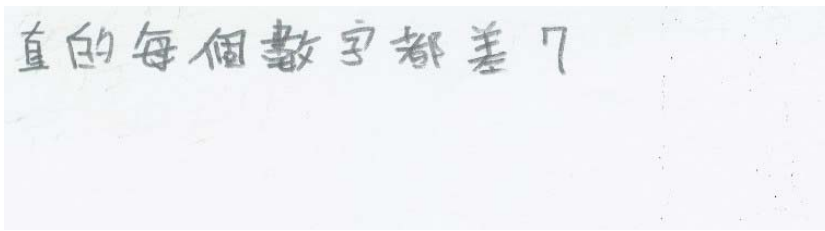


圖4 「月曆魔方陣」討論紀錄單 (H1、L2)

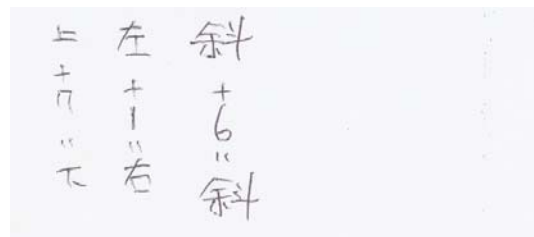


圖5 「月曆魔方陣」討論紀錄單 (H2、M2)

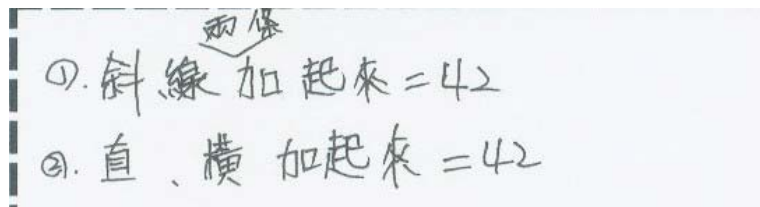


圖6 「月曆魔方陣」討論紀錄單 (M1、L1)

「少了幾頁的書」是利用生活情境將奇數偶數相結合，活動中學童需透過思考、推理將數字與真實生活結合，才能求出解答。在活動初期，H1、M1 學童未考慮真實的生活情境，因而認為答案應該為 8 張及 6 張。再經研究者要求說明為什麼時，H2、M1、L1、L2 學童考慮到連續頁是可能在同一張（如圖 7、8），而 H1、M1 學童除了考慮到連續頁是可能在同一張外，更考量到生活中書本頁數安排，顯示學童在「瞭解數字的基本意義與數字間關係」上皆有所發展。

20060419 教（少了幾頁的書）

M1：8 頁呀，好簡單喔！

師：不見得是 8 頁喔。有個人呢他看到喜歡的就會把書給撕了，撕了之後發現少了這些頁。

請問你他一共撕掉了幾張？

M1：8 張。

H2：6 張。

師：你如果覺得是 8 張，你就告訴我為什麼 8 張，你如果覺得是 6 張，你就告訴我為什麼

是 6 張，把你們的想法寫下來。

6 張，因為 32、33 在一頁，
61、62 在一頁。

圖 7 「少了幾頁的書」討論紀錄單 (H2、L2)

因為 13、21、^{一張}(32、33)、45、^{一張}(61、62)、70
 $8 - 2 = 6$ 。

圖 8 「少了幾頁的書」討論紀錄單 (M1、L1)

20060419 教 (少了幾頁的書)

H1：假設剛開始的那一頁是第一頁，然後第二頁在背面，然後三四、五六，然後呢，相連的就是這兩個(指著四和五)，所以 1、2、3、4、5...30、31，32 頁在左半頁和 33 頁在右半頁，這裡是撕了兩張。然後，34、35、36...59、60，61 在右半頁，62 在翻過來的左半頁，所以是同一張。所以總共撕了一(指著 13)、二(指著 21)、三(指著 32)、四(指著 33)、五(指著 45)、六(指著 61、62)、七張(指著 70)。

2、辨別數字大小

在「辨別數字大小」能力方面，由於研究對象為五年級學童，因此研究者在設計教學活動時以提升學童「辨別分數大小」的能力為主，而學童在「辨別數字大小」能力發展，主要可從「超級比一比」教學活動來觀察。

「超級比一比」是以撲克牌作為教學工具，增加數字的隨機性，並引發學童學習興趣，進而探討分數與整數乘積的大小關係。討論中，兩組學童皆先將可能出現的排列情況一一列出，再進行分數大小的比較。H1、M2、L1 學童認為當不同分數乘以相同整數時，若該分數為假分數，則乘積一定會較大，因此先刪除真分數乘以整數的情況。

20060322 教 (超級比一比)

H1：我們抽到的牌是 2、5、9。

師：你告訴我們怎麼找答案就好。

H1：2、5、9 這三個數可以排成這六種。然後，一個一個把它算出來。

師：那算出來你們怎麼去比大小？你用什麼方法？

H1：分子比分母大的，算出來答案應該會比較大。所以我先去除掉分母比分子大的。

L1：分子比分母大的會超過 1。

而在H2、M1、L2學童這組裡，原本不知如何辨別分數的大小，經過集思廣益後，找出將分數轉換成帶分數再進行比較。

20060322 教（超級比一比）

師：你們的困擾在哪裡？

H2：就是不能通分。

師：不能通分？你們的困擾是不能比較大小嗎？

M1：對呀。

L1：可以把它換成帶分數呀。

從兩組學童在處理如何比較分數乘以整數的大小的情形可知，學童在活動中能集思廣益，利用所學尋求適合的比較方法，進而發展比較數字大小的能力。

在理解並運用數字的稠密性方面，研究者雖未針對該能力設計教學活動，但在「奇妙的分數」學習單中，期望學童在找出等值分數後，透過等值分數的建立亦能發現分數的稠密性。在學童繳回的學習單中，對於「從上面的分數表中，你能找到 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{2}{3}$ 之間的分數嗎？」這個問題，不是沒回答，就是寫找不到，顯示學童在活動中，對於分數稠密性的理解並無成長。

3、瞭解運算與數字之關係

為提升學童「瞭解運算與數字之關係」的能力，研究者設計了「惱人的99999」、「凱蒂的數學頭腦」、「誰吃的多」、「看誰在說謊」、「那個加號錯了」、「靜香的右手玄機」6個教學活動。

「惱人的99999」是利用數字1~9九個數字，分別組成一個五位數與一個四位數，每個數字皆只能使用一次，使得這個五位數與這個四位數相加之總和等於99999。題目雖然乍看之下頗為複雜，但在活動中每個學童皆能求解正解，而從學童對解題方法提出的說明，可以看出其在了解數字改變後對運算結果的影響上獲得發展。

20060329 教（惱人的 99999）

師：你們是怎麼想的呢？

L1：嗯，只要每個加起來是 9 就好了。

(……………)

L2：因為填第一格的話呢，因為是 9 嘛，然後下面沒有東西，9 加沒有東西還是 9，所以等於 9，所以答案就是 9。

(……………)

M1：因為 9 減 1 到 8，等於這個答案。

(……………)

M2：就是 1 加多少會等於 9，2 加多少會等於 9，這樣去找的。

(……………)

H2：因為 9 已經填了嘛，然後剩下的 8 個，只要每選兩個加起來一定是 9 的，8 個就一定會用完。老師可不可以把 1~8 寫下來。

H2：第一個跟最後一個加起來等於 9，第二個跟倒數第二個加起來等於 9，第三個加倒數第三個等於 9，第四個加倒數第四個等於 9。

師：所以你把它配對囉？

H2：對呀。

(……………)

師：有人用減的呀，有的人用加的呀，有的人用連連看的，把 1~8 兩個兩個湊成 9，那接下來呢？該怎麼做？H1，你來說說看。

H1：老師我知道，這有 21 種排法。

在「凱蒂的數學頭腦」活動中，研究者以 51×98 為例，要求學童在計算時尋求最快的計算方法。起初，H1、H2 學童認為若不使用紙筆計算，要計算 51×98 最快的方法就是在心裡做直式計算。

20060412 教（凱蒂的數學頭腦）

H2：就是先 1×98 嘛。

師：嗯， 1×98 ，後來呢？

H2：然後剩下的是 5×98 。

師： 5×98 然後呢？

H2：然後 $5 \times 8 = 40$ ，4 記在心裡不要動。

師：所以你是在心裡計算囉？

H2：嗯，對呀。

H1：我也在心裡做直式。

在經思考後，M2 學童第一個提出利用分配律來增加計算效率，但其他學童卻不認為此策略會較快計算出正確答案，因此研究者改以其他算式來進行引導，讓學童體驗較有效率的計算策略。

20060412 教(凱蒂的數學頭腦)

M2：老師，後面那個 1 先不要管，先用 98×50 ，然後再加 98×1 。

師：你們覺得這樣會比較快嗎？

M1：不會。

H2：並不會。

(……………)

師：有時候當你們遇到計算的時候，譬如說 103×7 ，你們都很喜歡直接七三二十一，然後七一得七這樣算，可是你們有沒有想過，其實 100×7 你們需不需要計算？

生：不用。

師：然後 103 只是比 100 多了 3 而已，七三二十一這個只要你會九九乘法表應該都沒問題。所以 700 在加上 21 這個加法對你們來說也很容易，這樣 103×7 一下子就算出來了，根本連直式都不需要寫。

H2：對呀。

(……………)

H1：老師，如果換成 153×7 呢？

師：這個你們不是學過了？

H1：這哪有學過！

師：我們可以先將 100 拿出來變成 700，然後 50 和 7 是 350，再來是 21，這樣就可以啦。

H1：好簡單喔！

(……………)

L1：老師，你上個禮拜為什麼不先跟我們講？

H1：是上上個禮拜啦！

L1：你應該先告訴我們，這樣我們考試就不用算這麼久了。

M2：對嘛。

從學童瞭解之後反應可發現，若學童能理解原因，使用分配律來增加計算速度這樣的計算策略對學童來說是很有幫助的。這也同時顯示了 H1、H2、M2、L1 學童在此教學活動中，對於「了解數字改變後，對運算結果的影響」能力上獲得了成長。

「看誰在說謊」以班級人數做為情境，透過有趣的情境讓學童發現奇偶數與加法運算間的關係。起初各自利用自己思考的策略來解題，其中M1、M2、L2學童在解題上出現了0.5人的情況。而從H1、M2學童的說明中可發現，學童皆以實際算出男女生人數的方式來解題，並未考慮數字與運算間的關係。

20060412 教（看誰在說謊）

M1：老師，男生有 17.5 個。

M1：然後女生有 13.5 個。

(……………)

L2：等一下，為什麼我算 13.5？

M2：我算也是 13.5。

(……………)

師：第一個是筱雲，筱雲說全班有 28 個人，男生比女生多 5 個人。所以，請問一下，你們怎麼判斷對錯的呢？

H1： $28 \div 2 = 14$ ，然後 $14 + 5 = 19$ ，所以，男生有 19 人。

師：你覺得男生有 19 人，那女生呢？

H1： $28 - 19$ 。

師： $28 - 19$ ？有幾個人？

H1：14 個人。不是，不是，9 個人。

師：女生 9 個人？男生 19 個人，這樣會差 5 個人？

(……………)

M2：就是說全班有 28 個人，然後再先除以 2，然後再減 5。

師：就是 14 個人？

M2：對呀，就是 14 個人。然後女生就是 9 個人。

師：男生 14 個人？女生 9 個人？

M1：對呀，男生 14 個人，女生 9 個人。

師：男生 14 個人，女生 9 個人，加起來 23 個人？

L1：呵呵。

師：那你們有五個人是幽靈人口囉！

從研究者與學童的互動中，可以看到透過研究者引導學童開始發覺奇數、偶數與運算間的關係後，顯示學童在「了解運算對數字所產生的影響」的能力上有所成長。

20060412 教（看誰在說謊）

師：如果男生是偶數個人，女生是奇數個人，這樣男生跟女生是不是不一樣多人？

生：對呀。

師：那你們想一下，這樣男生跟女生可能會差多少人，是奇數還是偶數呢？

M2：奇數呀。

H2：奇數呀。我知道，因為奇數加奇數等於偶數。

(……………)

師：如果男生是偶數個人，女生也是偶數個人，那麼男生和女生會差多少個人？

生：偶數呀。

師：那還有一種可能，就是男生和女生都是奇數個人，那男生和女生會差多少人呢？

生：偶數呀。

師：好，剛剛我們討論的是它們的差，現在我們想一下，如果男生是偶數個人，女生是奇數個人，那麼全班的人數應該是奇數還是偶數呢？

生：奇數。

師：那男生和女生都是偶數個人呢？

生：偶數。

師：那男生和女生都是奇數個人呢？

生：偶數。

(……………)

師：所以你們看今天的題目，全班如果 28 個人，那麼班上的男生和女生人數，一定會是奇數和奇數或者偶數和偶數，那麼男生跟女生人數的差，有沒有可能是奇數？

生：不可能。

在「那個加號錯了」教學活動中，研究者透過1~10連續整數與運算符號所呈現的有趣方程式，讓學童體驗當「加」號變成「乘」號時，對運算結果會有怎樣的改變。在討論過程裡，在面對第二個問題：「如果不改變數字及運算結果，只改變運算符號，那正確的式子應該是什麼呢？」兩組學童雖都有將答案找出，但皆是利用計算機的幫助，將式子中每個「+」改成「×」一個一個求解找答案，顯示學童須經研究者的引導才能查覺當「加」號變成「乘」號時，對運算結果會有怎樣的改變，否則僅能以計算方式解答類似題目，無法發展其瞭解運算與數字之關係的能力。

4、彈性運用解題策略與判斷答案合理性

為培養學童「彈性運用解題策略與判斷答案合理性」的能力，研究者設計了「傑倫

的時間安排」、「解救古家人」、「禮物危機」3個教學活動。但從其他的教學活動中，亦可發現學童在「彈性運用解題策略與判斷答案合理性」的發展，因此以下除了討論「傑綸的時間安排」、「解救古家人」、「禮物危機」教學活動中的數感發展情況外，亦從可發現學童發展的活動中做一探討。

「傑綸的時間安排」教學活動的第一部分，是要求學童透過題目上所給的4個提示進行推理，找出傑綸在晚上的唸書狀況。小組討論之後，H1、L1學童（圖9）與M1、M2學童（圖10）兩組順利的將各科的先後順序及所花費的時間推算出來，顯示其在活動中發展了「判斷答案是否合理」的能力。

請推算出傑綸各科各花了多少時間。(請把理由寫下來)

④ 國語 50分 英文: 20分
 ③ 數學 10分
 ② 自然 30分
 ① 社會 30 40分

請你推算出第一個科目到第五個科目分別是什麼。(請把理由寫下來)

1. 英文 4. 國語
 2. 自然 5. 社會
 3. 數學

圖9 「傑綸的時間安排」討論學習單 (H1、L1)

請推算出傑綸各科各花了多少時間。(請把理由寫下來)

英文 20分 數學 10分 社會 40分
 自然 30分 國語 50分

請你推算出第一個科目到第五個科目分別是什麼。(請把理由寫下來)

1. 英文 5. 社會
 2. 自然
 3. 數學
 4. 國語

圖10 「傑綸的時間安排」討論學習單 (M1、M2)

「解救古家人」為以故事為背景之數學問題，學童除了運用到簡單的計算外，還需根據故事情節來判斷答案的合理性。在此一教學活動中，學童紛紛向研究者要求空白計

算紙，希望能自己寫解答，表現對題目的高度興趣。在學童所寫下的解救方法中，H1、H2、M2 學童皆以繪圖方式表達(如圖 11)，而 M1、L1、L2 學童則是以文字敘述作為說明(如圖 12)。學童都能成功解救古家人，顯示其在選擇適當的解題策略上有不錯的發展。

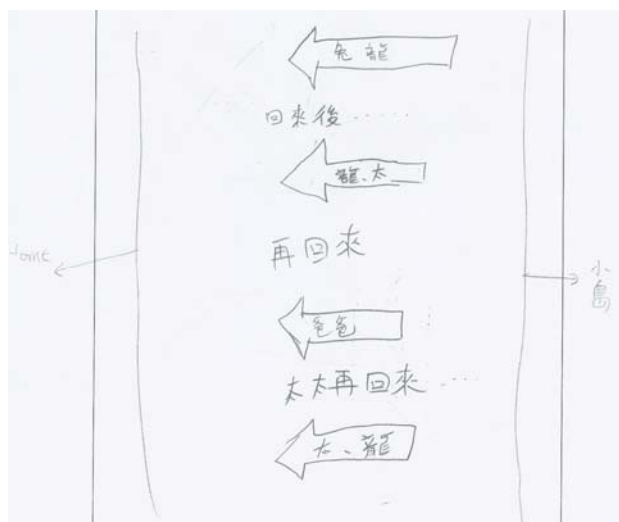


圖 11 「解救古家人」討論紀錄單 (H2、M2)

直太太和直小龍的體重加起來是 96 公斤
 所以他們兩個可以先回去，
 直小龍再開回小島，帶直小兔回去，
 直小兔把船開回去，
 直先生自己開回去，在叫直小兔開回來
 然後直小兔和直小龍在一起回去！
 就完成了！

圖 12 「解救古家人」討論紀錄單 (L1)

「禮物危機」亦是以故事情節為背景之數學問題，故事中利用質數除了 1 和本身外，沒有其他因數的特性形成「危機」。在討論過程中，由於 17 是個質數，沒有二分之一、三分之一和九分之一，因此學童們打趣地提出許多「不合理」的解決辦法，顯示 H1、M2 及 L1 學童在活動中發展了「判斷答案是否合理」的能力。