

# 小青的三角形概念

## —從 Duval 理論的觀點探究一位國小五年級視覺型兒童之個案研究

吳德邦<sup>1</sup> 馬秀蘭<sup>2</sup> 藍同利<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 國立臺中教育大學 數學教育系所

<sup>2</sup> 嶺東科技大學 企業管理系

<sup>3</sup> 台中縣龍山國小

(投稿日期：94 年 9 月 23 日；修正日期：94 年 11 月 15 日；接受日期：95 年 3 月 7 日)

### 摘要

本研究的目的，旨在探究一位國小五年級視覺型兒童~小青，在幾何領域中三角形這一範圍的認知發展狀況。本研究首先透過資料蒐集，篩選出符合視覺型發展特徵的兒童，經由專家進一步評估確認以檢選出本研究的樣本；藉由四次深入訪談與實物操弄，全程錄音錄影記錄，再以筆試施測「吳-薛氏 van Hiele 幾何認知發展測驗」用來比對訪談結果，蒐集其對三角形問題的解題活動資料，並將資料編碼轉譯整理為訪談原案，最後以 Duval 理論中對幾何圖形的四個瞭解：知覺性、操弄性、序列性、論述性等四個部份，分析視覺型兒童在三角形概念的發展情形。

綜合研究分析結果顯示：小青在三角形的圖形繪製、辨識、分類等半結構性訪談及筆試結果，呈現出視覺型兒童在學習幾何課程的發展情形，可以做為進一步研究「視覺型兒童」幾何認知發展的參考。

關鍵詞：視覺型、三角形概念、Duval 理論之知覺性、操弄性、序列性、論述性瞭解

## 壹、緒論

### 一、研究背景與動機

檢視我國的數學課程發展，在民國六十四年以前的數學課程，以數、計算、與實測三部份為主要的教學內容，而關於幾何部份則分散在計算與實測的教學內容裏，並沒有規劃獨立的教學單元；民國六十四年改版的數學課程，修訂教材內容，劃分為數、量、形三部份，幾何領域的教學才開始受到正視。民國八十二年修訂改版的數學課程，則更將幾何領域的教學以「圖形與空間」規畫獨立為一個主題，並將教材進一步分為平面幾何、立體幾何兩個部份來進行教學；而近期從民國九十年開始實施的九年一貫課程中，數學的學習領域正式以「幾何」名稱成為一個完整的教學主題；由我國歷年數學課程與教材的沿革發展，可以看出幾何獨特的課程與教材，在整體的數學課程中，佔有一席重要的地位（教育部，1968、1975、1993、2003）。

自民國八十二年教育部公佈實施國民小學數學課程起，一直到現階段我國實施中的九年一貫課程，有關於數學領域的幾何主題教材，主要依據 van Hiele 夫婦所發展的幾何思考模式與層次理論來編寫（朱建正，1996、吳德邦，1997）；依據這個理論，第一階段（小學一年級到三年級）幾何概念的學習，著重在對於幾何形體的探索、認識與具體操作；第二階段（小學四年級到五年級），重點則在於掌握幾何形體構成的要素，進行形體的分類、認識不同平面圖形的性質，以及全等、對稱的關係等，另外與數、量相關的幾何量（包括角度、邊長、面積），則逐步成為另一個教學重點；而到第三階段（小學六年級到國中一年級）的學習，則以透過形體的分割、拼合、截補等變換操作，更進一步了解形體的性質及非形式化的推理（教育部，2003）；在每個階段的學習歷程，因為學童的幾何認知發展狀況不同，而造成學童個別不同的知識架構，一般研究經常以「另有架構」或者是「迷思概念」稱之，關於此一部份的研究，歷來多以陳述不同類型的「迷思概念」為主，並已有相當詳盡的資料（沈佩芳，2002；高耀琮，2002；郭育宓，2002），然而檢視大部份的研究資料均顯示：研究偏重在以成人（教師）的角度思考，而非以兒童本位的立場看待兒童本身的認知發展，對於兒童在學習幾何知

識的認知發展的演化歷程更鮮少被論及；究竟兒童形成「迷思概念」的成因為何，以及如何幫助不同發展類型的兒童學習幾何教材，還尚待更進一步的釐清與研究。

依據 Lowenfeld 以及 Brittain (1987) 所提出兒童階段性的造型發展理論，即必須經過一個階段才能再進入下一個階段的發展特徵，對照於 van Hiele 的幾何思考層次實有不謀而合之處，Dale Harris 則指出：「兒童畫任何物體，都顯示出他對該物體所作歸類的概念。兒童的概念，特別是對他所常接觸的事物會漸趨複雜，而成為一種可以顯示他發展狀況的參考指標」(引自 Lowenfeld, 1987)。意即兒童所表現出的造型能力，與掌握幾何主題圖形與空間的能力是一致的。Lowenfeld 以及 Brittain 以兒童本位所提出的造型階段論中論及：兒童造型能力的發展依其作品特徵可清楚分辨為視覺型與觸覺型兩類，大約總數一半的兒童屬於視覺型，觸覺型兒童僅約占四分之一不到 (Lowenfeld, 1987)，在教學現場須要仔細蒐集學生完整的資料，再經縝密的專家評估，才能確切判定其為何種創造類型；視覺型的兒童較容易察覺客觀現象的存在，所以作品較傾向具象的繪畫特質。而觸覺型的兒童則較能以自己親身參與，體會經驗感受的方式以主觀去畫出他經歷的感覺，而非視覺對象的再現；對於這二種截然不同的兒童造型創造類型是否影響兒童幾何概念的認知發展，又這二種不同類型的兒童其在幾何的認知發展呈現出如何不同的狀況，歷來尚缺乏相關研究資料。

國內學者吳文如、呂玉琴 (2002) 研究十七位學齡前幼兒對空間概念與幾何形體的認知發展的結果指出：幼兒在辨識指認圖形的優先順序為三角形、圓形、長方形 (吳文如、呂玉琴, 2002)；而回溯人類幾何知識的發展歷程，由最早期發展出的畢氏定理、勾股弦定理等莫不是以三角形的性質發現來做為一個開端 (洪萬生, 1999)，乃興起以不同創造類型 (視覺型、觸覺型) 的兒童，探究其三角形的認知發展做為本研究主題，限於篇幅，本文只有一位國小五年級探討視覺型兒童，其他年級視覺型兒童暨觸覺型兒童則另文探究之。

## 二、研究目的

依據上述研究背景與動機，本文的研究目的有：

- (一) 探究小青~這位視覺型兒童的三角形認知發展，在三角形圖形的繪製、辨識、分類及筆試測驗的發展情形。
- (二) 依據 Duval 理論及訪談、筆試資料記錄，探究小青的三角形認知發展，在知覺性、作圖性、論述性、操弄性瞭解的發展狀況。

### 三、名詞解釋

- (一) 視覺型：依照兒童創作完成的藝術作品及處理經驗的態度，可以區分為兩種創造類型：視覺型與觸覺型。視覺型兒童主要具有觀察的性向，能以理性客觀的態度接受外來的刺激，從事物的整體輪廓開始認識，同時注意到細節，而能對事物產生一個整體的印象，並較能成功地將觸覺或運動感轉化為視覺經驗。
- (二) 三角形概念：指兒童透過繪製、分類、辨識、觸覺活動、紙筆測驗等活動所表現出對三角形輪廓的組成、輪廓的描述、圖形的判定、圖形的分類區別、及從觸覺、視覺綜合感知判斷的認知發展情形。
- (三) Duval 理論：(知覺性、操弄性、序列性、論述性瞭解) Duval (1995) 發現，個體透過認知圖形的組織、心像轉換、圖形的操弄、語言文字的陳述推理，可以達到知覺性、操弄性、作圖性、論述性等四個瞭解，藉以啟發個體對圖形的認知及幫助解決原先不易解決的幾何問題。

### 貳、理論基礎與文獻探討

#### 一、Duval 理論中的四個瞭解：

Duval (1995)認為圖形經由實物、心像、認知圖形組織、及語言文字的操弄、陳述、推理歷程，可以幫助我們達到知覺性、構圖性、論述性、操弄性的理解，藉以解決原先不易解決的幾何問題。因此提出了四個對於圖形的瞭解：

- (一) 知覺性瞭解(Perceptual apprehension)：只要一個圖形被提出，必定喚起知覺性的瞭解及至少一個其他的瞭解，一個可被察覺的圖形和僅是呈現在視網膜上的圖形最大的差異在於圖形組織的原則，以及圖像所帶給視覺者的暗示，另外我們也可區分和辨識出圖形中的子圖形(例如長方形被對角線分割出的兩個直角三角形)，但這些子圖形未必完全建立在原圖形的結構上。

(二) 序列性瞭解(Sequential apprehension)：當我們在構圖的過程、或是描述該圖形的結構時，必須要求構圖性的瞭解。在構圖的過程中，圖形的不同單位元件則會依特殊的順序的浮現。而構圖性的瞭解主要和繪圖工具(如尺、圓規)的限制有關，若是因為繪圖工具的侷限而無法表達出圖形性質間的關係，圖形則無法被瞭解。

(三) 論述性瞭解(Discursive apprehension)：幾何概念必須起源於對圖形的命名和一些假設，單由知覺性的瞭解，並不能使所有人對圖形的幾何性質達到共同的理解。在所有的幾何表徵中，對於其幾何性質的辨認仍然必須建立在敘述上，然後經過一個演繹的過程來決定這個圖形表現了什麼，論述性瞭解可以在知覺性瞭解不變的情況下而改變。

(四) 操弄性瞭解(Operative apprehension)：當我們觀察一個圖形時，我們可以透過操弄圖形來得到解題的靈感，而在以不同的方式更改圖形之後得到解釋，獲得操弄性的瞭解，而變更圖形的方式則大致分為下列幾種(1)分解組合(2)放大縮小(3)平移旋轉等，這三種方式可在心靈中操作，也可實際地去變動它，這些操弄可使圖形具有啟發性的功能，故可以在操弄的過程中，突顯出圖形的變化而得到某個證明步驟或解題的靈感。

而在學生學習幾何知識來說，Duval(1998)則認為應有三種認知過程，分別是：(一)視覺化(visualization)過程、(二)作圖(construction)、(三)推理(reasoning)：進行論說的過程。

## 二、羅恩菲爾關於兒童兩種創造類型的發展

Lowenfeld 以及 Brittain(1987)認為藉著兒童所完成的作品以及在處理(創作)經驗的態度可以清楚地分辨出兩種不同的發展類型：視覺型與觸覺型；這兩種子然不同類型的兒童以相當不同的方式經驗他們所存在的世界，視覺型兒童能以理性客觀的觀察者角度接受外在的訊息，並且能將這樣的視覺經驗轉化表現在他的作品上，而表現出理性正確的空間與透視感；觸覺型兒童經驗外在世界的方式主要透過敏銳易感的心靈，以肌肉感應、運動經驗、接觸的體驗、自我與外在世界的價值關係體驗，以感性的方式接受，並採取主觀的方式表達，而容易忽略

理性客觀的存在；透過羅恩菲爾為調查視覺或觸覺性向而特別設計的測驗結果顯示：有 47% 的人是明顯屬於視覺型，觸覺型僅占約 23% ，而另有 30% 則無法清楚辨定。兩種類型經研究者篩選與幾何造型能力相關之特徵分列如下：

（一）視覺型的特徵包括：

- 1、主要媒介依賴眼睛、且具有觀察性向的心理素質。
- 2、屬於客觀的創作類型。
- 3、主要從事物的外貌來獲取經驗。
- 4、能看到事物的整體，不忽略細節，並且能將整體印象分析為細節及部份印象。
- 5、從物體的外輪廓開始表現，然後才以細節充實形體。
- 6、視覺分析可以穿透物體的本質：包括（1）形狀和結構特徵的分析。（2）由光線、陰影、色彩、空氣及距離所造成的形狀或結構的改變。
- 7、具有將運動感及觸覺經驗轉化為視覺經驗的傾向。

（二）觸覺型的特徵：

- 1、主要媒介是身體本身肌肉感應、運動經驗、接觸的體驗、自我與外在世界的價值關係體驗。
- 2、作品屬於自我投射的結果，將身體的、感情的、接觸的瞭解表現成為事物形狀的特徵。
- 3、屬於高度主觀的創作類型。
- 4、不會把運動感或觸覺經驗轉化為視覺經驗，而是滿足在觸覺經驗或運動感本身。
- 5、比例採價值的比例而非視覺的比例。
- 6、通常對事物的經驗是片斷的，除非對事物本身有興趣，才會將事物片斷的經驗加以綜合，不會建立綜合印象。

參、研究設計

一、研究架構

本研究先以「吳-藍氏視覺型、觸覺型兒童特徵篩檢表」(Wu, Ma, & Lan,

2005) 篩選符合觸覺型特徵的兒童，經完整資料蒐集後，商請三位專家協助判定確認出研究對象；再以三角形圖形的繪製、辨識、分類等半結構性訪談的研究歷程，探索研究對象其三角形概念的認知發展情形，並兼採「吳-薛氏 van Hiele 幾何認知發展測驗」之紙筆測驗做為對照資料。

為使研究過程能更加客觀，以排除研究者過度主觀詮釋所造成之偏差，每次訪談均邀請觀察員及研究助理協助訪談的進行，在訪談中主要協助觀察記錄的工作，並對研究者所做成的記錄與詮釋提供修正意見，協助全程錄影及文件資料整理，包括實物操作的教具製作，以及提供訪談觀察記錄回饋。

## 二、研究對象

依據 Lownfeld (1957) 理論，視覺型與觸覺型兒童的特徵傾向在寫實前期開始會逐漸清晰，對照兒童的年齡發展，約為國小四年級開始，因此被推薦的學童以四到六年級為主。除了蒐集學童一年內近期美勞作品之外，同時經由家長、導師同意協助，提供學業成績及平常學習情形資料予以建檔；再商請具美勞教育專業背景且曾任教國小美術資優班教師、美勞教育研究所在職研究生、及具備美勞教育研究所學歷且持續創作資歷相當的專業畫家共三位專家學者協助，由專家學者依據學童作品特徵做進一步判定，視覺型、觸覺型兒童的特徵在其作品中所表現出來的特質主要從下列幾點加以評斷：(1) 人物造形：視覺型兒童能依客觀的視覺經驗作畫，能注意到比例與姿態，並掌握細節的描繪，較接近寫實的表現風格；觸覺型兒童則依主觀的經驗及情緒作畫，常有誇張、變形的表現，不太注意比例的關係，對有興趣的部分特別強調，餘則以簡略的方式表現，較接近表現主義的風格。(2) 空間表現：視覺型兒童能注意到明暗、陰影、地平線的現象，畫面的景物呈現較符合透視原理近大遠小的比例，以旁觀者的角度觀察與描繪主題；觸覺型兒童則常以圖式期基底線表現空間的概念，除非主題需要表現空間，否則會忽略空間的深度。(3) 色彩表現：視覺型兒童使用的色彩較接近自然的色彩，同時會注意到色彩在不同環境與光線下的變化；觸覺型兒童則使用主觀感情

的色彩，不太注意自然界中色彩與光線的變化。(4) 設計工藝的表現：視覺型兒童較注意視覺與美的效果；觸覺型兒童則較注意材料與使用的效果。在確定整個研究計劃之後，研究者開始著手尋找適當的研究對象；本研究之研究對象小青，為台中縣海線某國民小學五年級的學童，根據資料蒐集結果顯示：其作品的特質在人物造形、空間表現、色彩表現、設計工藝表現四個部份均分別呈現出符合視覺型兒童的表現特徵，經進一步請專家評量結果，確認符合視覺型兒童的特質；在數學領域的學習成績都維持在甲等（如表 1），在口語表達能力部份的程度也甚佳，他的美勞作品具有高度的描寫能力，能依透視比例呈現，繪製作品的過程從外形輪廓開始，再進行內部細節描繪；作品曾獲得台中縣學生美展入選、佳作獎、世界兒童畫展優選獎（詳見附錄）。依教師以視覺型、觸覺型兒童特徵篩檢表的判斷結果，小青的美勞作品在人物造形、空間表現、色彩表現、設計表現四個部分均符合視覺型兒童的特徵。而在視覺型、觸覺型兒童特徵專家評量表部分，經三位專家交叉判定的結果顯示：小青也符合視覺型兒童的特徵。

表 1 小青在四、五年級數學領域定期考查成績表

成績別	學期別			
	四上	四下	五上	五下
第一次成績考查	100	98	95	95
第二次成績考查	95	100	98	87
期末成績	98	98	97	91

### 三、研究工具

(一)、「吳-藍氏視覺型、觸覺型兒童特徵篩檢表」(Wu, Ma, & Lan, 2005)：依據康軒版國民小學藝術與人文課本、教師手冊，及參照羅恩菲爾理論 (Viktor Lowenfeld, 1957) 所編訂；主要從兒童創作作品中的人物造形、空間表現、色彩表現、及設計工藝表現四個部份的特徵來加以評判，以篩選出符合本研究的研究對象。

(二)、「吳-藍氏視覺型、觸覺型兒童特徵」專家評量表 (Wu, Ma, & Lan, 2005)：

採五等第評判「完全符合、符合、部份符合、不甚符合、不符合」由三位專家學者依據推薦者所填寫之篩檢表，檢核比對學生作品資料，再予以勾選判斷，並簽註意見。

(三)、「吳-藍氏三角形圖形繪製、辨識、分類與訪談大綱」(Wu, Ma, & Lan, 2005)：

由於本研究所探討的主題還屬於較少被研究論及的範疇，因此需要自行設計編選一套訪談施測工具，以符合本研究需求；在這個工具裡有關三角形圖形繪製、辨識及分類三個部份主要是依據Burger (1986) 所發展的訪談工具，及參閱相關幾何文獻 (吳德邦，2003；何森豪，2000；葛曉冬，2000；盧銘法，1996；黃盈君，2001；Usiskin，1982；Fuys, Geddes, & Tischler, 1988；Wu & Ma, 2005a; Wu & Ma, 2005b；Wu, Ma, & Lan 2005)，再予以增修編製而成 (Wu, Ma, & Lan, 2005)。

(四)、吳-薛氏van Hiele幾何認知發展測驗：

這個測驗工具是針對國小學童而設計，故試題的編製也只局限在於van Hiele 幾何思考層次的第一到第三層次為主。由於本研究之研究範圍在三角形的概念瞭解部份，因此在受測者全份試題做完後僅抽選出三角形部份的答題情形做進一步分析，並以這個部份的答題情形與其他訪談部份所得結果交互比對驗證。

#### 四、研究流程

本研究的研究流程可概分為如下述三個階段：

(一) 訪談前置作業：

首先參閱相關文獻，同時尋求藝術與人文領域學者專家協助提供意見，編製出「吳-藍氏視覺型、觸覺型兒童特徵篩檢表」及「吳-藍氏視覺型、觸覺型兒童特徵」專家評量表；接著透過具備美勞教育養成背景教師，依據其專業素養及本研究所編製之篩選工具，挑選出研究對象-觸覺型兒童，並再次以專家評量表做進一步確認；此外在請教專家學者意見後修訂了一份三角形圖形繪製、辨識、分類的工具 (Wu, Ma, & Lan, 2005)。

(二) 進行紙筆測驗與半結構性訪談：

確認出研究對象後，依照排定時程分別進行四段半結構性訪談及紙筆測驗，訪談過程並予以錄音、錄影記錄，每段訪談並邀請一位觀察員及一位研究助理協助研究進行，同時在每次訪談結束提供回饋意見藉以修正。

### (三) 資料處理與論文撰寫：

在訪談結束後依據錄影內容，將資料轉譯編碼後製作逐字稿，並在此基礎上結合文獻資料、觀察員回饋等文件，分析詮釋研究對象在三角形部份的認知發展，而紙筆測驗所得結果則做為比對校正的依據；彙整資料齊備後撰寫論文。

## 肆、結果與討論

### 一、小青在三角形的繪製、辨識、分類、及筆試的測驗訪談結果

#### (一) 三角形圖形的繪製：

研究者請小青先在白色 A4 的紙張上依序畫出三角形，可以使用工具如尺之類來作圖，畫好第一個和第二個三角形後就開始詢問兩者間有何不同，依序小青一共畫出了 19 個他認為是不同的三角形（如圖 1），研究者再分別詢問這些三角形之間的不同處在哪裏。

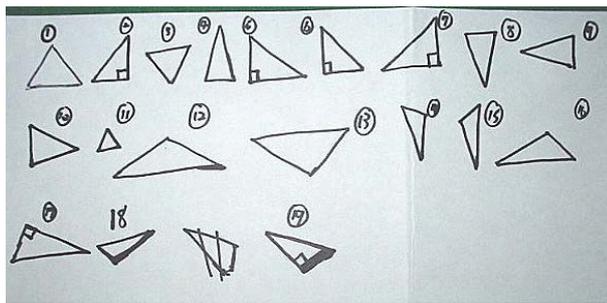


圖 1 小青所畫出的三角形

#### 1、 小青以「角度的變化」造出不同的三角形。

小青沒有使用輔助工具，徒手畫出第一個三角形，這個三角形比較接近「正三角形」的形狀，是一個封閉圖形，我請他在三角形的圖形上記上 1 號。接著我詢問他能不能畫出第二個三角形，小青說可以；小青畫出的第二個三角形「有一

個直角」，也是一個封閉圖形；接著我詢問小青：「1號和2號有那裏不同？」小青回答：「2號有一個直角」原案如下：

原案 1 2004. 3. 14

- G51T005 師：那現在老師問你：1號和2號三角形有什麼不同？  
G51T006 生：2號有「直角」，1號沒有「直角」。  
G51T007 師：什麼是「直角」？  
G51T008 生：垂直九十度的直角。  
G51T009 師：直角在哪裡？  
G51T010 生：這裡（用筆在圖形上畫出垂直記號）。

在畫完第三個三角形後，我詢問小青，是否可以再畫出不同的三角形？小青回答可以，並畫出和第四個和前三個不同的三角形，原案如下：

原案 2 2004. 3. 14

- G51T027 師：可以再畫出第四個三角形嗎？  
G51T028 生：可以啊！（畫出第四個三角形）  
G51T029 師：那4號和前面三個三角形有哪裡不同？  
G51T030 生：4號的其中一個角，比其他三個三角形的任意一個角都要小。
- G51T062 師：那12號呢？  
G51T063 生：12號的這個角度比較寬（指上端頂角）「比較寬」（比別的圖形寬），另外二個角的角度比較小。
- G51T066 師：那14號呢？  
G51T067 生：14號沒有直角，然後這一個角比較大，另二個角比較小。  
G51T068 師：那一個角比較大？  
G51T069 生：這一個（旋轉後正確指出）  
G51T070 師：這個角度大約有多大，和直角相比呢？  
G51T071 生：比直角大，大約有95度吧！  
G51T072 師：那15號呢？  
G51T073 生：它的每一個都不一樣長，然後也是一個角比較大，另二個角比較小。  
G51T074 師：那15號和14號相比較有什麼不同？它們的特徵你說的很像？

G51T075 生：14號的大角比較接近直角；15號的大角比直角大很多。

由原案 1、2 可以發現小青畫出不同三角形的策略，分別以「直角」、及「其中一個角比其他三個三角形的任意角都要小」、「角度比較寬（鈍角）」繪製出 2 號、4 號、12 號、14 號、15 號三角形。而小青對角度的概念了解是：直角是垂直九十度的角，並且能夠準確的標出直角的記號。另外他也畫出了「比其他三個三角形的任意角都要小」的銳角，及「比直角大」的鈍角，並能刻意的控制角的大小，以造出不同的三角形。由原案 2 中也發現，小青對 90 度的角用「直角」來稱呼，對「比直角大」或「比任意角都要小」的角則沒有用「鈍角」、或「銳角」來稱呼。

## 2、 小青認為三角形「朝向不同」，就是不同的三角形。

當小青畫好第三個三角形後研究者問他：「第三個三角形和前面二個三角形有何不同？」小青回答：「3 號三角形的方向和前面兩個三角形不同。」原案記錄如下：

原案 3	2004. 3. 14
G51T013	師：那3號和前面兩個三角形有什麼不同？
G51T014	生：方向不一樣。
G51T015	師：怎樣不一樣？
G51T016	生：1號朝上，2號朝左邊、3號是朝下的。
G51T045	師：那5號和前面四個三角形來比較呢？
G51T046	生：(指著5號的右側邊)這邊是朝右邊的。
G51T054	師：那8號呢？
G51T055	生：8號是朝下，然後(手指3號)朝下的長度不同。
G51T056	師：那9號呢？
G51T057	生：9號是朝左邊，而且沒有直角。
G51T058	師：那10號呢？
G51T059	生：10號朝向右邊，也是沒有直角。

由原案 3，在這裏小青採取的是以改變三角形「朝向」的策略，來繪製出不同的三角形；當我問他：「和前面三個三角形有什麼不同？」由原案 3 的記錄，小青區別這三個圖形的依據，不是以「邊長」、「角度」的條件，而是以「方向」（朝向）這個條件來區別。在後面所畫出來的第 8、9、10 三個三角形，也可以發現相同的情形。

### 3、 同樣的三角形圖形經過複製、旋轉後，會認為是不同的三角形。

為了進一步確認小青在判定不同三角形的條件時，是否受到「方向性」的影響，所以我要求小青回頭將第一個三角形描下來，以複製再製圖形的策略，試圖再釐清小青的概念，原案記錄如下：

原案 4 2004. 3. 14

- G51T017 師：是不是朝的方向不一樣，就是不同的三角形？
- G51T018 生：不一定。因為有的三角形角度不一樣。
- G51T019 師：比如說，如果把1號旋轉後再畫出另一個三角形，是不是就和1號不同？
- G51T020 生：有可能一樣，也有可能不一樣。
- G51T021 師：怎麼說？
- G51T022 生：因為如果轉了以後，這個邊加長，就不一樣了。
- G51T023 師：那如果老師拿一張紙照著1號的形狀剪下來，像這樣子（實際操作：複寫1號的外形後剪下），再移到別的地方，旋轉後畫出另一個三角形，現在這個三角形和1號是一樣的嗎？
- G51T024 生：不一樣了！
- G51T025 師：那再轉一下，（再畫出另一個三角形）這樣子和1號三角形一樣嗎？
- G51T026 生：不一樣。

由原案 4，當小青畫好第三個三角形後，我問他「是不是朝的方向不一樣，就是不同的三角形？」小青用一個不太肯定的說法「不一定」；於是我接

著改用複製圖形的策略，請小青用描圖紙蓋在原來的師 A4 紙上，把 1 號三角形描下來，然後請小青把描圖紙上的這個三角形剪下來，再將這個三角形旋轉跟原來圖形不同的角度，照著輪廓描到另一張 A4 的白紙上（圖形二次再製），然後我問他：「這還是原來的三角形嗎？」小青回答：「不一樣了！」接著我又請小青再描一個不同角度的三角形，再問小青一次：「那這樣子和 1 號三角形一樣嗎？」小青肯定的回答：「不一樣」。由此可以看出，小青的三角形概念了解，認為「朝向不同」就是不同的三角形，而原先相同的三角形，在旋轉之後，也會變成不同的三角形。

#### 4、 小青以改變「邊長」繪製不同的三角形。

在小青所畫的第四個三角形中，他除了注意到角度的條件，並刻意造出一個角度最小的頂角，同時他還刻意拉長兩腰的長度，以造出不同的三角形，原案記錄如下：

原案 5 2004.3.14

G51T029 師：那4號和前面三個三角形有哪裡不同？

G51T030 生：4號的其中一個角，比其他三個三角形的任意一個角都要小。

G51T031 師：還有嗎？

G51T032 生：這二邊的長度比其他三角形的邊長都要長。

G51T033 師：這二邊的長度有一樣長嗎？

G51T034 生：有。

G51T035 師：那另外三個三角形有沒有二個邊一樣長的？

G51T036 生：有。

G51T037 師：哪一個？

G51T038 生：1號的這裡（指二腰的位置），還有2號的這裡（指下底和右邊）、3號的這裡（左側邊和右側邊）是一樣長的。

G51T039 師：你怎麼確定是一樣長的？

G51T040 生：因為畫起來，只要兩邊有對稱，就會一樣長，差不多用眼睛就可以看出來。

G51T060 師：那11號呢？

G51T061 生：11號和1號相比小很多。三個邊的邊長也都短很多。

由原案 5 可知，小青除了注意到控制「角度」的這個條件之外，也採用「拉長兩腰」、「縮短三邊邊長」的方法，以造出不同的三角形，小青認為造形比例類似（正三角形）的 1 號和 11 號，兩者「邊長不同，就是不同的三角形」。另外從原案 5 也發現，小青造出了「兩邊對稱」的三角形，而對「兩邊對稱」的概念了解為：用目測就能發現「兩邊有對稱，就會一樣長」。在圖形名稱的使用上，則發現小青並沒有用「等腰三角形」來稱呼「兩邊有對稱」的三角形。

### 5、 小青以「大小」、「邊長」、「方向」及控制「其中一個銳角的角度」區別出六種直角三角形。

小青在訪談中一共畫出了 19 個三角形的圖形，而其中直角三角形就有 6 種；於是我問他：「怎樣區別出這六種直角三角形？」原案記錄如下：

- 原案 6      2004. 3. 14
- G51T045      師：那 5 號和前面四個三角形來比較呢？
- G51T046      生：（指著 5 號的右側邊）這邊是朝向右邊的。
- 
- G51T047      師：那 6 號呢？6 號也是朝向右邊啊？
- G51T048      生：不過從 1 號到 6 號，只有 2 號、5 號、和 6 號有直角（主動在圖形上標記垂直記號）
- G51T049      生：嗯——5 號要比 6 號大一點。
- 
- G51T050      師：那 7 號呢？有沒有直角？
- G51T051      生：有。（在圖形上標記垂直記號）
- G51T052      師：7 號和 2 號有沒有差別？
- G51T053      生：這個邊（指 7 號的斜邊）比較長，這個邊（指 2 號的斜邊）比較短。
- 
- G51T078      師：那 17 號呢？
- G51T079      生：17 號它有一個直角（幫它畫上記號），這裏，然後有一個角比較小。
- 
- G51T084      師：你一共畫出幾種直角三角形？
- G51T085      生：六種。

- G51T086 師：這六種直角三角形不同的地方在那裏？  
G51T087 生：方向不一樣，還有三個邊的長度不一樣。  
G51T088 師：除了「直角」，三角形的另外二個角有一樣嗎？  
G51T089 生：不一樣。

小青畫出的直角三角形，按編號排序為：2 號、5 號、6 號、7 號、17 號及 19 號六個圖形；當小青畫出編號 5 號（即第二個直角三角形時），我問他：5 號和前面四個三角形有那裏不同，事實上我想要探究的是：小青是以什麼條件區別出 2 號和 5 號兩個直角三角形；在這裏小青給我一個相當簡潔的答案是「這是朝右邊的」，以這個條件就將這五個三角形都區隔開了；小青接著又畫出和 5 號極為相似的 6 號直角三角形，於是我又再詢問：「那 6 號也是朝右邊啊？」結果這次，小青是以外形的「大小」（5 號比 6 號大）來做為區隔的條件。

後續畫出的 7 號圖形，一開始小青可能忘記標上直角記號，因為他畫得很接近直角三角形，所以我先問他：「7 號呢？它有沒有直角？」他才又補上直角記號；接著我就以外形上最接近 7 號圖形的 2 號問小青：「這二個直角三角形的差別在那裏？」小青這次改用「比較對應邊邊長」的方式，比對出兩個直角三角形的斜邊長度不同。

小青最後畫出的二個直角三角形，就以「方向」這個條件來看，很像是「畫出一對」，和前面四個直角三角形的朝向不同，並且小青是以「畫出其中一個角度較小」的直角三角形，來造出不同的直角三角形。

## 6、 小青對「對稱的三角形」的概念了解是「二邊等長」。

原案 7 2004. 3. 14

- G51T038 生：1 號的這裡（指二腰的位置），還有 2 號的這裡（指下底和右邊）、3 號的這裡（左側邊和右側邊）是一樣長的。  
G51T039 師：你怎麼確定是一樣長的？  
G51T040 生：因為畫起來，只要兩邊有對稱，就會一樣長，差不多用眼睛就可以看出來。

小青誤認為「二邊等長的三角形」就是「對稱的三角形」。

## 7、 小青畫出的三角形具有「封閉」的特性。

小青使用尺做繪圖的輔助工具，畫出第一個三角形，這個三角形比較接近「正三角形」的形狀，是一個封閉圖形，我請他在三角形的圖形上記上 1 號。接著我詢問他能不能畫出第二個三角形，小青說可以；小青畫出的第二個三角形「有一個直角」，也是一個封閉圖形；接著再詢問小青：「能不能再畫出不同的三角形？」

小青在思考過後分別畫出第三個圖形：「方向不一樣的」三角形、第四個圖形：「其中一個角比前三個圖形小的」三角形、以及後續的 5 號~19 號圖形；從小青所畫出的三角形來看（如圖 1），均具有封閉性這個特徵。

## 8、 小青對角度的概念了解以「直角」為基準，可以造出比「直角」大，或比較小的角

原案 8 2004. 3. 14

G51T067 生：14號沒有直角，然後這一個角比較大，另二個角比較小。

G51T068 師：那一個角比較大？

G51T069 生：這一個（旋轉後正確指出）

G51T070 師：這個角度大約有多大，和直角相比呢？

G51T071 生：比直角大，大約有95度吧！

G51T072 師：那15號呢？

G51T073 生：它的每一個都不一樣長，然後也是一個角比較大，另二個角比較小。

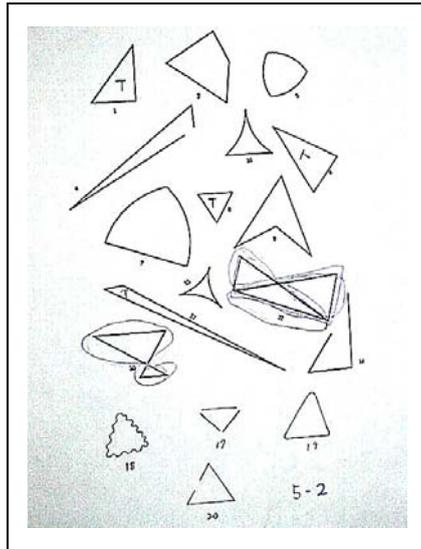
G51T074 師：那15號和14號相比較有什麼不同？它們的特徵你說的很像？

G51T075 生：14號的大角比較接近直角；15號的大角比直角大很多。

小青對角度概念的了解是以「直角」為基準來判斷比「直角」大，或比較小的角。

### （二）三角形圖形的辨識：

在三角形圖形辨識的測驗訪談中，研究者先給小青一張三角形圖形辨識測驗記錄單（Wu, Ma, & Lan, 2005），請小青在這張記錄單上將他認為是三角形的圖形以英文字母「T」做上記號，當他做答完畢後，再根據小青判定的情形以半結構訪談大綱做晤談並記錄，得到結果如下述（如圖 2）：



- 1、小青認為三角形必須具有「封閉」的特性：由小青作答記錄單判定為三角形者計有：1、6、8、11、10、12 號共六個圖形。
- 2、小青認為沒有「封閉性」就不是三角形：由小青作答記錄單沒有做上三角形記號的計有：2、3、4、7、9、14、16、17、18、19、20 號圖形。其中 4、14、17、20 號圖形為接近三角形的非封閉圖形，原案記錄如下：

原案 9    2004. 3. 21  
 G512T059    師：4號為什麼不是三角形？  
 G512T060    生：它其中一個邊有缺一點。

G512T071    師：17號為什麼不是三角形？  
 G512T072    生：都沒有頂點。

G512T073    師：20號為什麼不是三角形？  
 G512T074    生：它其中一個邊有缺一些。

- 3、小青認為如果圖形是「四個邊、四個角」、「圓角」、「彎曲的邊」、「內凹的邊」、「外突的邊」、「圓弧的邊」，那這個圖形就不是三角形：小青在記錄單上將四個邊、四個角的 2、9 號圖形、圓弧外突的邊的 3、7 號圖形、內凹弧形的 15、16 號圖形、扭曲的邊的 18 號圖形、以及圓角的 19 號圖形判定為「都不是三角形」。原案記錄如下：

原案 10    2004. 3. 21

- G512T055 師：好，那老師問你 2號為什麼不是三角形？
- G512T056 生：因為它有四個邊。
- G512T057 師：那3號為什麼不是三角形？
- G512T058 生：因為它的三個邊都有彎曲。
- G512T061 師：19號為什麼不是三角形？
- G512T062 生：它的頂點附近的邊是圓的。
- G512T063 師：16號為什麼不是三角形？
- G512T064 生：它的二個邊凹進去。
- G512T065 師：9號為什麼不是三角形？
- G512T066 生：因為它有一個邊凹進去，它有四個邊。
- G512T067 師：那9號是幾邊形。
- G512T068 生：四邊形。
- G512T069 師：18號為什麼不是三角形？
- G512T070 生：因為它的三個邊都有彎曲。

4、 小青認為三角形必須具備的條件有：「有三個邊」、「內角和 180 度」、「三個邊不能有缺、不能彎曲」、「要有頂點」。

我問小青：如果要請他告訴別人怎樣從這張紙上挑選出三角形？去試探小青對三角形定義的概念了解，發現小青對三角形的定義概念如原案 11 記錄：

原案 11 2004. 3. 21

- G512T091 師：如果要請你教別人在這張紙上挑選出三角形，你會怎麼教他？要怎麼挑出三角形？
- G512T092 生：必須有三個邊、必須要有頂點、它的邊不能有缺、也不能彎曲。
- G512T093 師：還有嗎？
- G512T094 生：三角形內角和一定要180度。
- G512T095 師：還有嗎？
- G512T096 生：它的邊都不是圓滑形的。
- G512T097 師：還有嗎？
- G512T098 生：沒有了。

小青對三角形的定義概念，主要是依據外型這個條件來進行判定；他認為三角形必須有三個邊、必須要有頂點、它的邊不能有缺、邊也不能彎曲四個條件，大致上和前面研究者所問的「x號為什麼是三角形？」所得到的答案是吻

合的；另外也發現，小青注意到三角形的一個幾何性質：三角形的內角和一定是 180 度。

#### 5、 小青以實測的方式了解三角形的內角和是 180 度。

我問小青：11 號為什麼是三角形？小青除了從外型的條件來回答之外，另外他提到：因為它的三個角的內角和是 180 度；我繼續追問他：你又沒有量角度怎麼會知道？小青回答：因為不管是什麼三角形，他的內角和一定是 180 度。原案記錄如下：

原案 12 2004.3.21

G512T037 師：11 號為什麼是三角形？

G512T038 生：它有三個邊。

G512T039 師：還有嗎？

G512T040 生：有三個角。

G512T041 師：還有嗎？

G512T042 生：三個邊都有連在一起。

G512T043 師：還有嗎？

G512T044 生：三個角的內角和是 180 度。

G512T045 師：你又沒有量角度怎麼會知道？

G512T046 生：因為不管是什麼三角形，它的內角和一定是 180 度。

G512T047 師：你有量過嗎？

G512T048 生：沒有。

G512T049 師：那你怎麼知道的？

G512T050 生：老師上課講過。

G512T051 師：有沒有實際測量，上課的時候？

G512T052 生：有。

G512T053 師：怎麼測量？

G512T054 生：用量角器量每一個角然後加起來就知道了。

在訪談中顯見小青是以他上數學課的經驗來回答這個答案，是以量角器實測加總去驗證出「三角形的內角和是 180 度」這個性質。所以小青強調：「不管是什麼三角形，它的內角和一定是 180 度。」

#### (三) 三角形圖形的分類：

研究者在提供給小青進行三角形分類的圖形片中，加入了幾個不是三角形

的圖片，請小青在分類之前，將不是三角形的圖片先挑出來，並逐一詢問小青為什麼這些圖片不是三角形，訪談結果和前面的二次訪談做比對，以確認小青在非三角形部分的概念了解，詢問結果分析如下：

1、小青認為不是三角形的圖片有：編號 2 號、5 號、10 號、13 號四個圖形（如圖 3）。原案記錄如下：

原案 13 2004. 3. 28

G513T016 師：請問你，不是三角形的你找到幾個？

G513T017 生：四個。

G513T018 師：哪四個？

G513T019 生：二號、五號、十三號、十號。

2、小青認為「四個邊、四個角」的圖形，不是三角形（如圖 3）。

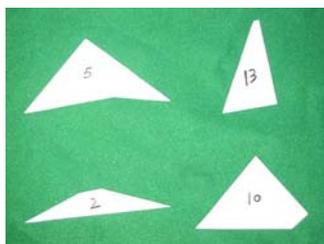


圖 3 小青認為不是三角形的圖形

3、其他圖形片（三角形）的分類：

小青第一次的分類將三角形分成五類：

(1) 第一類：有一個直角的三角形：編號 3 號、6 號、7 號、16 號、19 號。

小青將圖形一共分成了五大類，我問小青：分類標準在哪裡？小青回答：「這一類的三角形有一個直角。」於是我再追問小青：什麼是直角？原案記錄如下：

原案 14 2004. 3. 28

G513T038 師：五大類你怎麼分的，你看什麼地方分的？

G513T039 生：這邊然後是----有一個直角的。

G513T040 師：你指的是那幾個是有一個直角的？

G513T041 生：這一個（指其中一組）。

G513T042 師：這一對有幾號

G513T043 生：三號、六號、七號、十六號、十九號。

- G513T044 師：一共有幾個？
- G513T045 生：五個。
- G513T046 師：五個，這直角是幾度？
- G513T047 生：九十度。

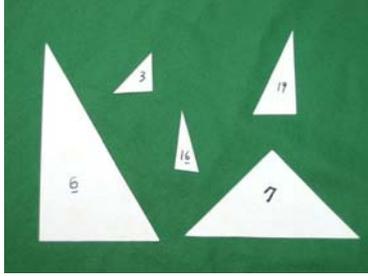


圖 4 小青三角形的分類~有一個直角的三角形

(2) 第二類：二邊一樣長的三角形（如圖 5）。

我問小青：第二類的標準在哪裡？小青回答：「其中二邊一樣長。」原案記錄如下：

原案 15 2004. 3. 28

- G513T050 師：這一類，這一類是看哪裡？
- G513T051 生：其中兩個邊是一樣的長。
- G513T052 師：其中兩個邊是一樣的長？
- G513T053 生：對。
- G513T099 師：好，那這兩個三角形跟別組三角形有哪裡不一樣？
- G513T100 生：他只有兩個邊是一樣長。
- G513T101 師：它有兩個邊是一樣長？
- G513T102 生：對。
- G513T103 師：你找到幾個？
- G513T104 生：兩個。
- G513T105 師：哪兩個？
- G513T106 生：一號跟十八號。
- G513T107 師：好，這兩個三角形有特殊的名稱嗎？有嗎？知道還是不知道？
- G513T108 生：有。
- G513T109 師：有，什麼三角形？
- G513T110 生：等腰三角形。
- G513T111 師：你確定？它是等腰三角形？
- G513T112 生：對。

訪談中因為小青在中間插話，所以就先確認正三角形這一類，到最後

我才又回到「二邊一樣長」的這一類三角形；這一類小青一共找到 1 號和 18 號兩個圖形，我又再問小青：這一類三角形有沒有特殊的名稱，發現小青以「等腰三角形」稱之。

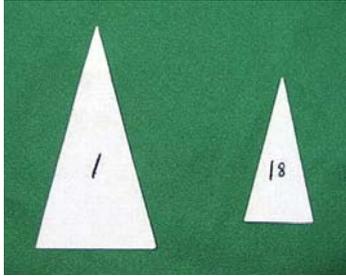


圖 5 兩邊一樣長的三角形

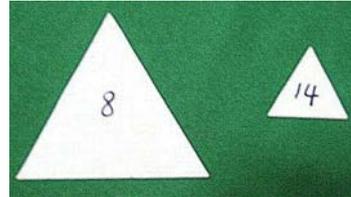


圖 6 正三角形

(3) 第三類：正三角形：編號 8 號、14 號（如圖 6）。

小青將正三角形也放在第二類中（二邊一樣長的三角形），我請小青將這一堆三角形編號唸給我聽時，小青發現有兩個三角形是三邊一樣長的，所以就將這二個三角形再挑出來，原案記錄如下：

原案 16 2004.3.28

G513T054 師：只有兩個邊是一樣長嗎？兩個邊一樣長那你覺得它是幾號？可以唸給我聽嗎？

G513T055 生：他三個邊一樣長。

G513T056 師：那它叫什麼三角形？

G513T057 生：正三角形。

G513T058 師：正三角形？這一類叫做正三角形？

G513T059 師：有幾個？

G513T060 生：兩個。

G513T061 師：哪兩個？

G513T062 生：八號跟十四號。

(4) 第四類：三邊都不一樣長的三角形（如圖 7）。

第四類的三角形小青是以邊長的條件去區別，原案記錄如下：

原案 17 2004.3.28

G513T072 師：為什麼是同一類？這兩個同一類的原因在哪裡？

- G513T073 生：三個邊長都不一樣。
- G513T074 師：三個邊長都不一樣，確定嗎？
- G513T075 生：確定。
- G513T076 師：好那這一類的三角形是三個邊都不一樣長的三角形。
- G513T077 師：就這樣子而已？
- G513T078 生：嗯。

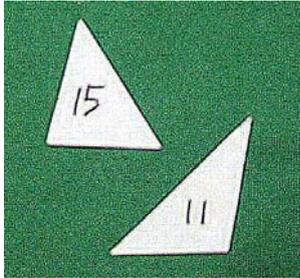


圖 7 三邊都不一樣長的三角形

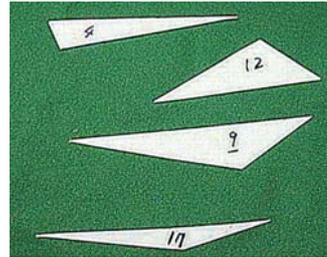


圖 8 二個銳角一個鈍角的三角形

(5) 第五類：二個銳角一個鈍角的三角形（如圖 8）。

到第五類時，小青第一次以角度的條件來回答：「有二個銳角、一個鈍角」

他一共找到四個相同條件的圖形：原案記錄如下：

原案 18 2004. 3. 28

- G513T079 師：還有咧，第四類，這裡？
- G513T080 生：嗯。
- G513T081 師：這四個三角形，你覺得它有什麼特徵跟別組不一樣的地方？
- G513T082 生：其中兩個角是銳角。
- G513T083 師：其中兩個角是銳角，然後呢還有嗎？
- G513T084 生：剩下的一個角是鈍角。
- G513T085 師：剩下的一個角是鈍角，好，你找到幾個？
- G513T086 生：四個。
- G513T087 師：四個，哪四個？
- G513T088 生：四號、十七號、九號、十二號。
- G513T089 師：OK，這四個都是這樣子？
- G513T090 生：對。
- G513T091 師：有一個鈍角？
- G513T092 生：對。
- G513T093 師：有兩個銳角？

G513T094 生：對。

G513T095 師：這一類三角形你有給它特殊名稱嗎？有沒有？有或沒有？

G513T096 生：沒有。

就訪談結果發現，小青可以用角度這個條件來進行區別分類，也能正確判斷出銳角、鈍角的不同，但對這一類的圖形並沒有以「鈍角三角形」稱之。

小青第二次的分類情形：

接著我又試著問小青：能不能用不同的方式再進行分類，這次發現小青採用角度的條件分成三類：

(1) 第一類：都是銳角的三角形（如圖 9）。原案記錄如下：

原案 19 2004. 3. 28

G513T117 師：用什麼方法來分？

G513T118 生：其中兩個角是銳角哪一個角是鈍角。

G513T119 師：你要用鈍角跟銳角來分對不對？那現在開始再把它重新分一下，好，那些是銳角的？

G513T120 生：這四個。

G513T121 師：這四個都是銳角。

G513T122 生：對。

G513T123 師：你的意思是說他的三個角通通都是銳角嗎？

G513T124 生：對。

G513T125 師：它有沒有鈍角？

G513T126 生：沒有。

為了確認小青對角度的概念，所以我問小青：這一類的三角形三個角都是銳角嗎？小青回答：「對」。

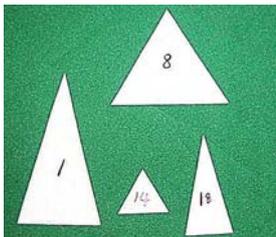


圖 9 都是銳角的三角形

(2) 第二類：二個銳角一個鈍角的三角形（如圖 10）。原案記錄如下：

原案 20 2004. 3. 28

- G513T127 師：沒有，那第二類呢？
- G513T128 生：這個。
- G513T129 師：這邊這個是有鈍角的嗎？
- G513T130 生：它有一個鈍角兩個銳角。
- G513T131 師：鈍角是指幾度？
- G513T132 生：九十度或九十度以上的角。
- G513T133 師：九十度或九十度以上的角，就叫做鈍角是嗎？
- G513T134 生：對。
- G513T135 師：OK，那請你把每個角的鈍角指給我看，從最左手邊十一號，十一號的鈍角在哪裡？
- G513T136 生：這裡。
- G513T137 師：OK，十五號的鈍角呢？
- G513T138 生：這個不是。
- G513T139 師：這個不是？
- G513T140 生：是這邊的。
- G513T141 師：這個是這邊的，OK，那再來呢？
- G513T142 生：十一號在這裡。
- G513T143 師：下一個。
- G513T144 生：這裡。
- 
- G513T164 師：那你怎麼確定它是九十度或大於九十度？你用看的？
- G513T165 生：對。
- G513T166 師：用看的去判斷？
- G513T167 生：嗯。
- G513T168 師：OK，那請問你還有不一樣的分類方法嗎？
- G513T169 生：沒有了。
- G513T170 師：沒有了，只有這樣？
- G513T171 生：對。
- G513T172 師：好，謝謝。

在第一次的分類中，小青已經將這個條件的圖形挑出來；第二次的分類中，小青只從角度的條件考慮，又再一次挑出這個條件的圖形，所以我進一步的追問小青對鈍角的概念，結果發現：小青認為鈍角是 90 度或 90 度以上的角。為了確認小青對鈍角的認知，所以我請小青逐一將他認為是這一類的圖形，一一指出鈍

角的位置，發現小青將「直角」也歸類為「鈍角」。

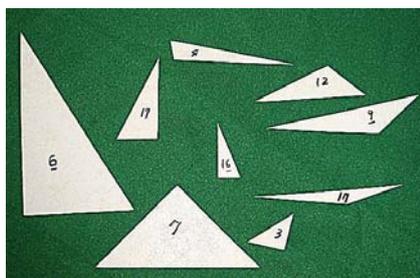


圖 10 二個銳角一個鈍角的三角形

(四) 小青在「吳-薛氏 van Hiele 幾何層次認知發展測驗」的測驗結果：

本研究主要探討重點在小青的三角形概念，抽檢小青在三角形概念的測驗作答情形：第一部份通過率為 1.00、第二部份的通過率為 1.00、第三部份為 .70，詳如表 2 所示：

表 2 小青在「吳-薛氏 van Hiele 幾何層次認知發展測驗」的通過率

測驗部份	總題數	答對題數	答錯題數	通過率
第一部份視覺層次	9	9	0	1.0
第二部份描述層次	7	7	0	1.0
第三部份理論層次	10	7	3	.700
合計	26	23	3	.885

分析小青在筆試部份答對與答錯的題型，根據選項，剔除互有矛盾的選答，得到小青在三角形概念的認知情形如下：

### (一)、屬於視覺的層次

- 1、三角形必須有封閉性。
- 2、邊必須是直的，外突、內彎、曲線的邊都不是三角形。
- 3、認為太扁、狹長的三角形（大鈍角），是三角形。

- 4、三角形邊的粗細不影響判斷。
- 5、認為不同朝向的三角形也是三角形。
- 6、著色與否不影響判斷。

## (二)、屬於描述的層次

- 1、三角形有三個邊。
- 2、三角形有三個頂點。
- 3、認為所有三角形內角和都是 180 度。
- 4、認為直角三角形有一個直角。
- 5、認為等腰三角形二個邊相等。
- 6、認為等腰三角形中有兩個角相等。
- 7、認為正三角形的三個角都是 60 度。
- 8、認為正三角形三個邊都一樣長。
- 9、無法判定兩個直角三角形可以拼成一個長方形。

## (三)、屬於理論的層次

- 1、能推論出圓心角至圓周上之任意兩點所連成之三角形，必有兩角相等。
- 2、認為等腰三角形若頂角為 60 度則推論為正三角形。
- 3、認為直角三角形若其中一角為直角，則推論出另二角相加為 90 度。
- 4、若等腰三角形的頂角為 60 度時，推論出三邊等長。
- 5、認為正三角形是等腰三角形，且等腰三角形也是正三角形。
- 6、認為直角三角形若有兩角相等，則一定是等腰直角三角形。
- 7、認為等腰直角三角形一定是直角三角形。
- 8、能推論出兩個相異的直角三角形，其兩銳角和相等。
- 9、能推論出鈍角三角形中兩銳角的和小於 90 度。
- 10、能推論出銳角三角形中兩角和大於 90 度。
- 11、能推論出圓心角至圓周之兩相異線段等長。

12、認為等腰三角形兩對邊等長、一對角相等、且能根據底角角度推論出頂角角度。

根據作答情形及概念分析，小青在第一部份視覺層次的測驗通過率達到 1.00，第二部份的描述層次通過率也是全部答對 1.00、第三部份理論層次通過率稍低通過率為.700，對照 van Hiele 的層次理論，顯現小青在三角形概念的了解情形，已達到理論的層次(Level 3)。

二、小青的三角形認知發展，在知覺性、操弄性、構圖性、論述性瞭解的發展狀況：

綜合三段結合實物操弄的半結構性訪談及紙筆測驗結果，依據 Duval 理論，以下就小青的知覺性、操弄性、構圖性、論述性瞭解的發展狀況分別陳述：

(一) 小青三角形概念的知覺性瞭解：

- 1、三角形必須具有封閉性的特徵。
- 2、「缺了一個角」的三角形，就不是三角形。
- 3、「缺了一個邊」的三角形，就不是三角形。
- 4、「圓弧的三角形」，不是三角形。
- 5、「扭曲的邊」的三角形，不是三角形。
- 6、「圓弧的角」的三角形，不是三角形
- 7、邊不能彎曲。
- 8、看起來像「正三角形」的圖形，易判定為「是正三角形」。
- 9、直角的角度是 90 度。

(二) 小青三角形概念的操弄性瞭解：

- 1、一個三角形經過旋轉後，就不是原來的三角形。
- 2、三角形的朝向不同，就是不同的三角形。

- 3、以實測方式了解三角形的內角和是 180 度。
- 4、以改變三角形邊長的策略來造出不同的三角形。
- 5、根據三角形的外形分類，可以分成：

(1) 以邊長來區分：

- a. 二邊一樣長的三角形。
- b. 正三角形。
- c. 三邊都不一樣長的三角形。

(2) 以角度來區分：

- 1、有一個直角的三角形：其中一個角是 90 度。
- 2、二個銳角一個鈍角的三角形。
- 3、都是銳角的三角形。
- 4、將直角三角形也歸類為鈍角三角形。

(3) 利用旋轉的方式找到不同類型的三角型。

(三) 小青三角形概念的構圖性瞭解：

- 1、三角形的三個邊必須是「黏起來的」。
- 2、三角形必須有三個「直的」邊，三個「尖的」角。
- 3、三角形有三個頂點。
- 4、對稱的三角形其兩邊等長。
- 5、三角形的邊必須是直線，不能扭曲、不能彎（弧線）。
- 6、正三角形必須三個角都相等。
- 7、任意三角形的三個內角相加都是 180 度。

(四) 小青三角形概念的論述性瞭解：

- 1、直角三角形若有兩角相等則必為等腰直角三角形。

- 2、無法判定兩個直角三角形可以拼成一個長方形。
- 3、認為直角三角形若其中一角為直角，則推論出另二角相加為 90 度。
- 4、能根據等腰三角形之底角角度推論出頂角角度。
- 5、若等腰三角形的頂角為 60 度時，推論出三邊等長。
- 6、認為正三角形是等腰三角形，等腰三角形也是正三角形。
- 7、能推論出鈍角三角形中兩銳角的和小於 90 度。
- 8、能推論出銳角三角形中兩角和大於 90 度。
- 9、能推論出圓心角至圓周之兩相異線段等長。
- 10、能推論出圓心角至圓周上之任意兩點所連成之三角形，必有兩角相等。

#### 伍、結論與建議

綜合研究結果發現：小青在三角形圖形繪製部份，採取徒手作圖的方式，一共畫出了 19 種他認為不同的三角形，這些圖形均具有封閉性、及三個直的邊、三個尖的頂點的特徵；在繪製的過程中，發現小青採取的策略分別是以改變圖形的「邊長」、「角度」、「大小」、「朝向」等條件，藉以造出不同的三角形；在小青所畫出的 19 種圖形中，有六個直角三角形，小青均能清楚的指出直角的位置，並且說明直角就是垂直九十度的角。為了進一步確認小青在判定不同三角形的條件時，是否受到「方向性」的影響，所以採取複製再製圖形的策略，進行確認，結果發現：小青對相同的三角形經過再製旋轉後，就會認為是不同的三角形。另外發現小青也畫出了具有二邊等長特徵的「對稱的三角形」，但小青並沒有用「等腰三角形」的名稱來稱呼它。

在三角形圖形的辨識部份：小青能夠依據三角形的條件將圖形準確的判定出來，非三角形的部份也能夠完全的予以排除，並且小青能夠以幾何的性質分別陳述理由；如小青認為三角形的條件必須是「有三個直的邊」、「三個尖的角」的封閉圖形，「三角形的內角和是 180 度」、「三個邊不能有缺、不能彎曲」、「要有頂點」；對角的概念了解則是「由兩條直的邊所組成」，「只要有一邊是彎曲

的就不是角」。小青認為如果圖形是「四個邊、四個角」、「圓角」、「彎曲的邊」、「內凹的邊」、「外突的邊」、「圓弧的邊」，那這個圖形就不是三角形。

對照小青在三角形的分類測驗的訪談也發現，小青能夠將「非三角形」的圖形先歸為一類並予以排除；然後小青分別依據「邊長」、「角度」的條件將三角形分成了「二邊一樣長的三角形」、「正三角形」、「三邊不一樣長的三角形」、及「有一個直角的三角形」、「二個銳角一個鈍角的三角形」、「都是銳角三角形」等種類。過程中發現的小青將直角三角形也放在二個銳角一個鈍角的三角形中，經提問後發現：小青將直角也歸類為鈍角的一種。

檢視小青在紙筆部份的測驗結果，也發現小青在三角形部份的概念了解情形與訪談的結果是吻合一致的；小青在「吳-薛氏 van Hiele 幾何層次認知發展測驗」的測驗作答情形：第一部份（視覺的層次）通過率為 1.00、第二部份（描述的層次）的通過率也是 1.00、第三部份（理論的層次）通過率為 .70；紙筆測驗除了用以對照訪談結果，另外也呈現小青三角形概念中推論部份的概念了解情形：如小青已能夠由等腰三角形、直角三角形之已知條件推論未知的角度或邊長（兩腰）的關係。

致 謝：

本文係「行政院國家科學委員會科學教育處」補助專題研究計畫之部分研究成果（計劃名稱：「國小學生在圖形與空間概念知覺性、操弄性、作圖性、論說性了解之後續研究」，計劃編號：NSC 92-2521-S-142-004。計劃主持人：吳德邦，共同主持人：馬秀蘭；碩士班研究生研究助理：藍同利），特此申謝！文中論述均屬主持人暨其研究團隊、作者們的意見，不代表「國家科學委員會科學教育處」的立場。

## 參考文獻

- 王文科 (2003): **教育研究法**。台北市: 五南圖書出版股份有限公司。
- 王德育譯 (Viktor Lowenfeld 原著, 1957) (1991): **創造與心智的成長**。台北縣: 三友圖書公司。
- 左台益、梁能勇 (2001): 國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。**師大學報**, 46 (1、2), 1-20。
- 左台益 (2003): **青少年的數學概念學習研究—子計畫三青少年的對稱概念發展**。行政院國家科學委員會專題, 研究計畫成果報告, 計畫編號: NSC91-2522-S-003-009。
- 朱建正 (1996): 造形活動在國小幾何教學中的地位。**國立嘉義師範學院八十四學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編**。180-186。
- 李素卿譯 (Thomas L. Good & Jere Brophy 原著): **當代教育心理學**。台北市: 五南圖書出版有限公司。
- 吳德邦 (1995): 范析理 (van Hiele) 模式對我國師範學院學生在非歐幾何學的學習成就與幾何思考層次之研究 (英文撰寫、中文摘要)。**台中師院學報**, 9, 443-474。
- 吳德邦 (1998a): **van Hiele 幾何思考層次之研究**。台北市: 許氏美術印刷有限公司印行。
- 吳德邦 (1998b): **台灣中部地區國小學童 van Hiele 幾何思考層次之研究**。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告, 計畫編號: NSC86-2511-S-142-001。
- 吳德邦 (1998c): 國中學生 van Hiele 幾何思考層次之研究。**八十七年度數學教育專題研究計畫成果討論會摘要**, 91-96。(行政院國家科學委員會專題研究計畫, 計畫編號: NSC 87-2511-S-142-003。)
- 吳德邦、謝翠玲 (1998): 根據 van Hiele 理論來探討國小數學實驗課程之幾何教材。**中師數理學報**, 2(1), 22-62。
- 吳德邦 (2000a): 台灣中部地區國小學童 van Hiele 幾何思考層次之研究-筆試

- 部分。八十八學年度師範學院教育學術論文發表會論文集，35-66。
- 吳德邦 (2000b)：台灣中部地區國小學童 van Hiele 幾何思考層次之研究—晤談部份，*進修學訊年刊*，6，11-32。
- 吳德邦 (2001)：van Hiele 五階段學習模式對國小學童學習幾何概念之研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告，計畫編號：NSC89-2511-S-142-011。
- 吳德邦 (2002)：九年一貫數學圖形與空間課程學生在知覺性、操弄性、作圖性、論說性瞭解之研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告，計畫編號：NSC91-2521-S-142-004。
- 吳德邦 (2003)：國小學生在圖形與空間概念知覺性、操弄性、作圖性、論說性了解之後續研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫，計劃編號：NSC 92-2521-S-142-004-。
- 吳德邦、藍同利 (2004)：一位國小六年級觸覺型兒童在三角形概念之個案研究~從 Duval 理論的觀點。文章發表於「學習教學 & 教學學習：數學教師教育研究之系列對話」研討會，台北市台灣數學教育學會、國立台北師範學院主辦，民國 93 年 12 月 12 日 (星期日)。
- 吳德邦、陳東村 (2004)：國小學童立體圖畫表徵之研究—以長方體為例。文章發表於「學習教學 & 教學學習：數學教師教育研究之系列對話」研討會，台北市台灣數學教育學會、國立台北師範學院主辦，民國 93 年 11 月 27 日 (星期六)。
- 吳德邦、薛建成 (2004)：依據 van Hiele 幾何思考理論—探究臺灣中部地區國小學童幾何概念發展之研究。文章發表於「學習教學 & 教學學習：數學教師教育研究之系列對話」研討會，台北市台灣數學教育學會、國立台北師範學院主辦，民國 93 年 11 月 27 日 (星期六)。
- 吳文如、呂玉琴 (2002)：幼兒幾何形體概念的研究。91 學年度師範學院教育學術論文發表會論文集，3，1551-1585。
- 沈佩芳 (2002)：國小高年級學童的平面幾何形的概念之探討。國立台北師範學

- 院數理教學研究所碩士論文（未出版）。
- 何森豪（1998）：**van Hiele 幾何發展水準之量化模式—以國小中高年級學生在四邊形概念之表現為例**。國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文（未出版）。
- 教育部（1968）：**國民小學課程標準**。台北：中正書局。
- 教育部（1975）：**國民小學課程標準**。台北：中正書局。
- 教育部（1993）：**國民小學課程標準**。台北：中正書局。
- 教育部（2003）：**國民中小學九年一貫課程綱要**。台北：作者。
- 國立編譯館（2000）：**國民小學數學教學指引第一~十二冊**。台北市：國立編譯館。
- 洪萬生（1985）：**從李約瑟出發-數學史科學史文集**。台北市：九章出版社。
- 高耀琮（2002）：**兒童平面幾何圖形概念之探討**。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文（未出版）。
- 陳創義（2003）。**青少年的幾何形狀概念發展研究**。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告，計畫編號：NSC91-2522-S-003-007。
- 張英傑（2001）：**兒童幾何形體概念之初步探究**。國立台北師範學院學報，14，491-528。
- 郭育宓（2003）。**國小學童平面基本圖形視覺期迷思概念之研究—以高雄縣壽齡國小為例**。台南師範學院教師在職進修數學教育碩士學位班碩士論文（未出版）。
- 郭榮瑞等（2000）：**國民小學美勞教學指引第八、九冊**。台北縣：康軒文教事業股份有限公司。
- 甯自強（1996）：**數學的格式與內容：皮亞傑與維高斯基**。論文發表於台北市立師院「皮亞傑與維高斯基的對話」百年校慶學術研討會。台北市立師範學院主辦，民國八十五年元月二十五日、二十六日。
- 謝政權等（2000）：**國民小學美勞教學指引第九冊**。台南市：翰林出版事業股份有限公司。
- 葛曉冬（2000）：**花蓮地區國小泰雅族學生 van Hiele 幾何思考層次之調查研究**。

- 國立花蓮師範學院國小科學教育研究所碩士論文（未出版）。
- 黃盈君（2001）：國小五年級學童三角形圖形概念之分析研究。國立台中師範學院數學教育研究所碩士論文（未出版）。
- 劉好（1993）：國小數學科新課程中幾何教材的設計。國立嘉義師範學院八十二年年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編，69-79。嘉義：國立嘉義師範學院。
- 薛建成（2003）：依據 van Hiele 幾何思考理論—探究台灣中部地區國小學童幾何概念發展之研究。國立台中師範學院數學教育碩士班碩士論文（未出版）。
- 盧銘法（1996）：國小中高年級幾何概念之分析研究-以 van Hiele 幾何思考層次與試題關聯結構分析為探討基礎。國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文（未出版）。
- 謝貞秀、張英傑（2003）：國小三四年級平面圖形概念之探究。國立台北師範學院學報，16（2），97-134。
- 譚寧君（1993）：兒童的幾何觀-從 van Hiele 幾何思考層次的發展模式談起。國民教育，33（5、6），12-17。
- Burger, W. F., Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in mathematics Education*, 17(1). 31-48.
- Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and Teaching geometry, K-12*, (1-16). Reston, VA: NCTM.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with computers in Mathematics Education* (pp.142-127). Berlin, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive Point of View. In C. Mammana & V.

- Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.37-52). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (2002). *Proof understanding in mathematics: what ways for students?*  
 Paper presented in “Proceeding of 2002 International Conference on  
 Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand. 61-77.
- Fuys, D. (1985). Van Hiele Levels of Thinking in Geometry. *Education and Urban Society*, 17(4), 447-462.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hoffer, A. (1983). van Hiele-Base research. In R. Landa (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. (pp. 205-228). New York, NY: Academic Press, Inc.
- Lowenfeld, V. (1957). *Creative and mental growth* (3<sup>rd</sup> ed ). New York, NY: Macmillan.
- Lowenfeld, V., & Brittain, L. W. (1987). *Creative and mental growth* (8<sup>th</sup> edn). New York, NY: Macmillan.
- Molina, D. D. (1990). *The applicability of the van Hiele theory to transformational geometry*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Texas at Austin.
- Sigel, I., & Coop, R. (1974). Cognitive style and classroom practice. In R. Coop & K. Whire. (Eds.), *Psychological concepts in the classroom*. New York, NY: Harper & Row.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final Report of the cognitive development and achievement in secondary school geometry project)*. Chicago, IL: University of Chicago, Department of Education.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

- Wu, D. B. (1994). *A study of the use of the van Hiele model in the teaching of non-Euclidean geometry to prospective elementary school teachers in Taiwan, the Republic of China*. Unpublished Doctoral dissertation, University of Northern Colorado, Greeley, Colorado.
- Wu, D. B., Ma, H. L. (2005a). A study of the geometric concepts of the elementary school students at the van Hiele level one. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4*, pp. 329-366. Melbourne, Australia: PME29.
- Wu, D. B., Ma, H. L. (2005b). *A study of the developing procedure of the van Hiele geometry test for elementary school students*. Paper presented in The Third East Asia Regional Conference on Mathematics Education (ICMI Regional Conference). 7 Aug. – 12 Aug., 2005. Shanghai, Nanjing, and Hangzhou China.
- Wu, D. B., Ma, H. L., & Lan, T. L. (2005). *A case study of a visual type child on triangle concepts - analysis from the viewpoints of van Hiele and Duval theory*. Paper presented in International Conference on Education, Redesigning Pedagogy: Research, Policy, Practice. 30 May – 1 June, 2005. National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore.

# A Study of the Cognitive Development of Visual Type Child on Triangle Conception in Geometry --- Analysis from the Viewpoint of Duval Theory

Der-bang Wu<sup>1</sup> Hsiu-lan Ma<sup>2</sup> Tung-Li Lan<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics Education, National Taichung University

<sup>2</sup>Department of Business Administration, Ling-tung University

<sup>3</sup>Long-Sang Primary School, Taichung county

## **Abstract**

The purposes of this research was to (a) study Sheau-Ching, a visual type child, regarding her triangle concept, and (b) to analyzed the concept development based on Duval's Theory, perceptual, sequential, discursive, and operation apprehension. The researcher tried to understand and analysis the development of visual type children. The data were collected via four intensive semi-structured interviews, and a paper-and-pencil geometry cognitive development test.

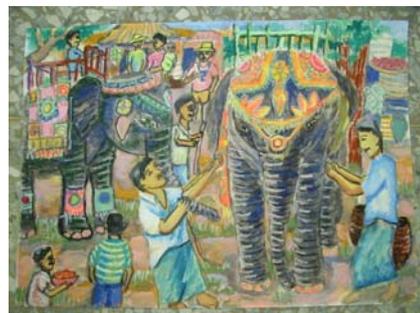
During the semi-structured interviews, the participant was giving tasks of creating, recognizing, classifying, and touching triangles. The participant demonstrated that she met the obstacles and special cognitive development. The results of this study would help researchers to understand the geometry concept development of the visual children.

Key words: visual type, triangle concept, Duval Theory (perceptual, sequential 、 discursive, operative apprehension

附錄：



小青的設計作品



小青的繪畫作品