

# 積木怎麼不見了～體積空間能力的教學

林芳姬<sup>1</sup> 姚如芬<sup>2</sup>

<sup>1</sup>雲林縣同安國民小學 <sup>2</sup>國立嘉義大學數學教育研究所

(投稿日期：94年6月8日；修正日期：94年7月1日；接受日期：94年7月7日)

## 摘要

本研究旨在發展體積空間能力教學活動設計，以幫助學童空間能力的建立與理解二維圖形與三維形體間的異同，並探討學童在此教學活動中的學習表現。本研究由研究者透過個案研究的方法，以雲林縣平安國小（化名）六年級九位學童為研究對象，透過具體操作激發學童的學習興趣，使學童了解二維圖形與三維形體的異同。

關鍵詞：空間能力、教學活動、體積

## 壹、前言

舉凡日常生活中所見，例如：電冰箱、電視機、書本、氣球、杯子、……等物品都擁有體積，但體積究竟是什麼呢？譚寧君（1996）曾提出體積指的是物體所占空間的大小，可用堆疊活動來描述，並透過視覺知道含有長、有寬、有高、有厚等的三維空間的量，或透過肢體比出物體占有空間的量，例如：棒球與籃球兩者體積的差異。張英傑（2003）也說明了體積是三維的量，指物件占有空間的大小，因此必須是有範圍且排列緊密的。

當孩子開始理解三度空間的物體（包含人）時，就會建立形狀大小的初始概念，並且逐漸地從知道物體占有空間，發展到曉得它在空間中的位置（Nickson, 2000/2004）。有許多的文獻支持「在教導學童空間概念時，運用教具活動會得到正向的教學效果」（Fuys, Geddes, & Tichler, 1988; Sowell, 1989; Gal & Vinner, 1997），因此透過適當的教學活動便能幫助學童空間能力的建立，進而延伸到物體三維與二維表徵間的轉換。

研究者基於國內課程對於空間概念著墨不多，造成學童學習體積時的困擾，再加上學童總是希望學習是輕鬆有趣的，因此冀望透過具體操作的教學活動引起學童的學習興趣。本研究透過個案研究的方式，由研究挑選雲林縣平安國小（化名）六年級九位為研究對象，希望藉由活動歷程探討教學活動設計的可行性。以下首先作文獻探討，再介紹本研究的設計，其次呈現教學活動實施的結果，最後則是本研究的結語。

## 貳、文獻探討

吳貞祥（1978）認為累積各項的空間經驗，發展成空間知覺後，經過思考與協調，方能慢慢形成抽象的概念，稱為空間概念（spatial relations）。Piaget（引自許民陽，1994）認為在八歲以前（2~7歲）的運思前期，其空間概念仍以自我為中心（egocentrism），隨著年齡的增長，才能跳出非自我中心觀，而能以其他人或物為參考點（reference point）判斷空間內的相對位置。

蔣家唐（1995）指出「空間能力」為辨識圖形及操控圖象的能力。空間能力應該是

一種「轉換」的能力，學生將二維的平面圖形或者三維的立體圖形在腦海中想像性地轉換。轉換的原則可能是視點的變化，可能是圖形定位的移動，也可能是二維與三維圖像間的互換，較簡易的記憶、複製、觀察、配對等認知能力，是複雜困難轉換能力之基礎。

孩子形成空間表徵是經由他自己的運作和內化活動逐步組織得來的，因此，空間的表徵不是來自於「瀏覽」空間情境，而是來自於孩子在主動操該空間情境時建立的經驗（Clements and Battista，1992）。Nickson（2000/2004）指出，孩子早就已經對於圖形與空間形成一些概念，這些概念的某些部分相當具有個別性，並且可能違反數學原則，或者根本就是錯誤的，但教師需要區辨出孩子空間上的前置概念，才能從中延伸或幫助他們釐清迷思概念，為健全的概念建立基礎。此外，教具的運用有助於其空間概念的發展，因為各種操弄物體的經驗都會幫助他們建立一個訊息紀錄庫（repertoire），以協助他們解釋未來擴展時所面臨的新經驗。

從上述諸位學者的主張可以發現，空間概念的學習除了讓學童在心中將圖形移動、旋轉外，操作具體物也是有助於學習的重要因素，因此研究者將以操作具體物（積木）貫穿整個教學活動，讓學童經由操作物體的經驗建立知識。

## 參、研究設計

本研究於個案研究，採用學童學習單及學習日誌進行訪談。本章共分為研究參與者、教學活動設計及資料蒐集與分析三部分，以下分別敘述之：

### 一、研究參與者

#### （一）研究者

第一位研究者在本研究當中屬於參與的觀察者（participant as observer），是以一種局內人的角色來觀察研究對象的行為，也是本研究中主要的資料蒐集者。此外，研究對象為第一位研究者服務國小之六年級學生，為求能貫徹研究者本身的設計理念，故自行進行教學。

#### （二）研究對象

研究對象為第一位研究者任教的雲林縣平安國小（化名）六年級的學童，取樣的方法乃是根據學童平常的數學成績，爲了讓資料分析時能有更詳細、完整的詮釋，以了解應用在實際教學時是否適切可行，以個案研究的方式挑選九位學童，分別爲 3 位高成就、3 位中成就及 3 位低成就，有如一個班級的縮小體。茲將這九位學童的背景與資料分述如下：

（一）小威（男－高）：

喜歡的科目是數學、社會，感到比較困難的科目是自然與生活科技。平常喜歡打球，熱心指導同學功課，各科均有出色的表現。在數學學習方面，領悟力強，常能自行找出較容易學習的方式。

（二）小泰（男－中）：

喜歡的科目是國語，感到比較困難的科目是數學。平常喜歡打球，熱心助人，上課時也很專心聽講，在班上屬於中上程度的學童。在數學學習方面，對於較基礎的問題能順利解決，但對於富變化的題型則易束手無策。

（三）小岳（男－高）：

喜歡的科目是數學，感到比較困難的科目是自然與生活科技。平常喜歡打球，個性相當外向好動，但脾氣較暴躁，上課非常認真，對於不會的問題，總是勇於舉手發問。由於對數學相當有興趣，因此在解題時都會特別謹慎小心。

（四）小維（男－低）：

喜歡的科目是健康與體育，感到困難的科目是數學。平常喜歡閱讀課外書籍，因此上課時與教師的互動不錯，但口語表達的能力較不佳。在數學學習方面表現不甚理想，也較無信心。

（五）小軍（男－中）：

喜歡的科目是健康與體育，感到困難的科目是國語。平常喜歡打球，在課業方面領悟能力不錯，但容易粗心大意。在數學學習方面，喜歡挑戰一些較富難度的題目。

（六）小稜（女－高）：

喜歡的科目是國語，感到困難的科目是數學。平常喜歡幫老師的忙，對於學業成就較差的同學也都會熱心指導，在班上是一個人緣不錯的學生，上課認真學習，但個性較害羞，不會的問題不會在上課中發問，而是私下問老師。在數學學習方面，反應能力不錯，通常都有不錯的表現。

(七) 小婷 (女-中):

喜歡的科目是社會，感到困難的科目是數學。平常喜歡幫老師的忙，也很熱心幫助同學，上課相當認真，不會的問題會請教同學及老師。在數學學習方面則起起伏伏，但大致來說還不錯。

(八) 小秀 (女-低):

喜歡的科目是健康與體育，感到困難的科目是數學。平常喜歡打球，在體育方面有不怎樣的表現，但在其它科目的學習表現則差強人意。在數學學習方面，會作好預習的工作，對於作業也是會認真完成，對於一些變化性不大的題型有不怎樣的表現，但原則上數學對她來說是一門相當頭痛的科目。

(九) 小麗 (女-低):

喜歡的科目是國語，感到困難的科目是數學。平常相當活潑好動，上課也勇於發言，但對自己的學業成就不是很要求。在數學學習方面，喜歡活動式的課程，較能激起她學習的興趣。

## 二、教學活動設計

本研究體積空間能力教學設計的理念，在於強調學童透過實際操作了解平面立體圖形與實際物體的異同，進而正確點算出積木體積。具體而言，就是透過實際操作的方式，讓學童了解有相同的視圖或俯瞰圖，積木位置不一定相同；而後還能了解到積木個數也不一定相同。茲將本研究體積空間能力教學活動設計說明如下：

活動一：乾坤大挪移	
適用對象	五、六年級
教學時間	40 分
教學目標	在積木個數相同的情況下，透過實際堆疊，了解在俯瞰圖或視圖相同時，積木位置不一定相同。
教具準備	積木
教學流程	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.教師說明積木堆疊的規則：欲在積木的上方或側邊擺放積木時，必須將兩個積木的面完全貼合。</li> <li>2.教師介紹俯瞰圖即是由上方往下方所看到的結果。</li> <li>3.請學童運用 4 個積木排出俯瞰時只能看到一面的積木形體。</li> <li>4.請學童運用 4 個積木排出俯瞰時只能看到二面的積木形體。</li> <li>5.用相同的俯瞰圖，要學童運用 10 個積木排出立體圖形，並觀察其他學童所排的形體。</li> <li>6.教師引導：有相同的俯瞰圖，積木位置不一定相同。</li> <li>7.請學童觀察某一面向的視圖，並要他用積木排出，並說明實際形體與視圖間的異同。</li> <li>8.教師引導：從某一面向有相同的視圖，積木位置不一定相同。</li> </ol>

活動二：我有透視眼	
適用對象	五、六年級
教學時間	40 分
教學目標	在積木個數不限的情況下，透過實際堆疊，了解在俯瞰圖或視圖相同時，積木個數及位置不一定相同。
教具準備	積木

教學流程	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.用同一俯瞰圖，要學童排出最少積木數的形體。</li> <li>2.學童發現每個人所排的積木個數相同、位置也相同。</li> <li>3.用同一俯瞰圖，要學童任意排出立體形體。</li> <li>4.教師引導：有相同俯瞰圖，積木個數及位置不一定相同。</li> <li>5.用同一面向的視圖，要學童排出最少積木數的形體。</li> <li>6.學童發現每個人所排的積木個數相同、位置也相同。</li> <li>7.用同一面向的視圖，要學童任意排出立體形體。</li> <li>8.教師引導：從某一面向有相同的視圖，積木個數及積木位置不一定相同。</li> </ol>
------	---

### 三、資料蒐集與分析

在質的研究過程中，資料的蒐集和分析同時持續地進行，也就說蒐集資料不是機械式地記錄資料，而是必須同時分析和解釋資料，並且立即知道這些資料是否互相矛盾、是否需要進一步蒐集更多的資料（黃瑞琴，1991）。因此研究者在進行教學活動的過程中，除了以參與觀察、訪談和其他探究方式蒐集資料外，也持續地由現場資料中進行資料分析。

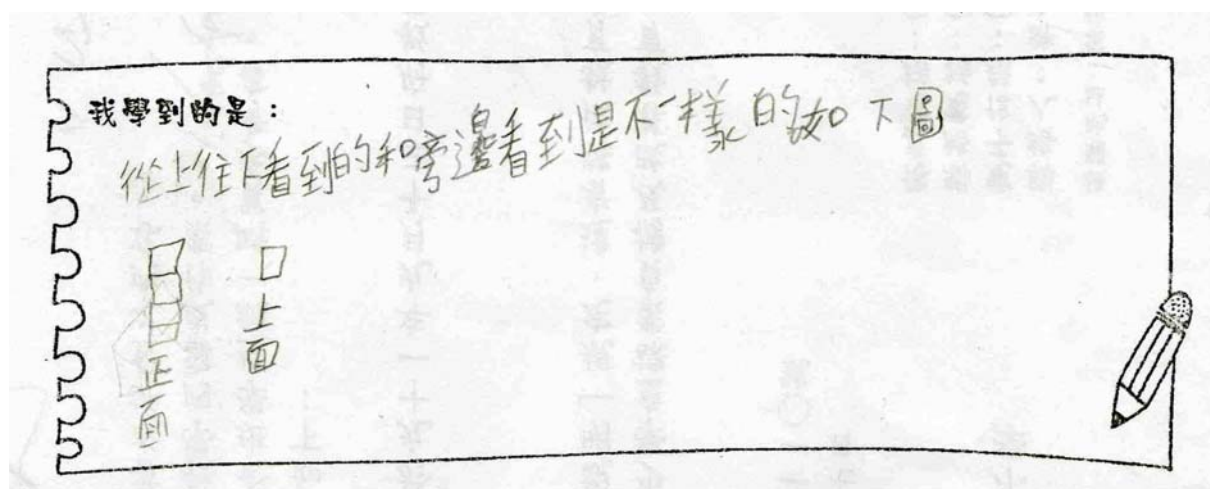
研究者在進行教學時，同時也要觀察學童的學習情形及反應，並且將過程以錄音、錄影的方式記錄下來，以蒐集學童在教學過程中的相關資料。每次實施教學後，讓學童填寫學習單、學習日誌，以了解學童的學習成效及學習後的想法、反思。最後再參照使用這些資料自然地引發學童談話，請他們說明或澄清這些資料上的某些觀點，以獲得更詳細、更完整的詮釋。

資料分析的過程中，透過參與觀察、學童的文件及訪談等多方資料來源，來檢核研究者對資料解釋的合理性與適切性，且資料在經第一位研究者分析後，會再由第二位研究進行確認。

## 肆、研究結果

### (一) 透過觀察俯瞰圖，學童能夠了解看到的積木個數不一定等於全部的積木個數

所謂「俯瞰」，指的便是由上方往下方看，因此研究者在「乾坤大挪移」的教學活動中，透過讓學童俯瞰積木並畫下它的俯瞰圖，學童即可發現，俯瞰時，同一鉛垂線上的積木是重疊的，因此同一排的積木只能看到一個，也就是說看到的積木個數不一定會等於全部的積木個數。以下為學童在學習日誌上的寫作，可以驗證研究者的說法，例如：



(誌 931213-小維)

「用積木排出不同的形體，然後俯瞰它，有的積木會看不見。」(誌 931227-小婷)

「積木實際的個數，可能比俯瞰看到的多。」

「只要底的形狀固定住，不管上面怎麼疊，俯瞰圖永遠都會一樣。」

(誌 940104-小威)

「在積木的上面可以加上無限顆，但俯瞰圖也一樣。」(誌 940104-小維)

### (二) 透過觀察俯瞰圖再加上從不同角度觀看積木，學童能了解有相同俯瞰圖形的形體，個數及位置不一定相同

研究者在「我有透視眼」的活動中，藉由俯瞰積木讓學童畫下俯瞰圖，而後再從不同角度觀看積木，並要學童去發現實際形體和俯瞰圖之間之間有何異同。學童發現到，兩個形體具有同樣的俯瞰圖，但是實際形體卻可能有不同的積木個數，造成這樣結果的原因可能是因為積木的高度不同或是擺放的位置不同，但因積木的重疊，使得俯瞰圖相



同。從以下學童在學習日誌上的寫作，可以驗證研究者的說法，例如：

「我知道積木的俯瞰圖形相同，但排列的方式和積木的個數不一定一樣。」

(誌 931227-小威)

「用固定的積木個數，可以排出不同形狀但俯瞰圖都是固定的形體。」

(誌 931227-小岳)

「俯瞰圖是一樣的，但排出的形狀會有很多種。」

(誌 940104-小軍)

「用數量不同的積木排出的形體，它的俯瞰圖有可能是一樣的。」

(誌 940104-小稜)

「如果俯瞰圖固定時，可以把積木移到不同的位置，但是俯瞰圖還是沒變。」

(誌 931227-小麗)

### (三) 透過觀察某一面向的視圖及實際堆疊積木，學童能夠了解看到的積木個數不一定等於全部的積木個數

有少數學童在進行積木點數時會忽略隱藏在裡面或後面的積木，因此在「乾坤大挪移」的活動中，研究者先讓學童看如圖 1 的視圖，然後要他們用積木排出此形體，學童們都是用 9 個積木排出，而後研究者便佈題：「如果這一個視圖是用 10 個積木所排出的，你會怎麼排呢？」很快地，學童就在這個形體的後方排下 1 個積木，他們也從這裡發現到，雖然他們看到有 9 個積木，但因為觀看角度及位置的不同，會使得部分積木是隱藏看不見的，因此看到的積木個數不一定會等於全部的積木個數。從以下上課觀察結果及學童在學習日誌上的寫作，可以驗證研究者的說法，例如：

師：請你們用積木排出如圖 1 的形體。(學童排好後) 請問你們總共用了幾個積木？

全部學童：9 個。

師：有沒有人答案不是 9 個的？(學童答案都是 9 個) 但是有一個小朋友用了 10 個積木排出圖 1 這個圖形，請問他是怎麼排的？

小岳：才 9 個而已，怎麼可能 10 個？

小軍：它後面可以擋住一個，只是你看不到。

小麗：對啊！

師：請你們把 10 個積木都排出來。(學童排好後) 我發現有兩種不同的形體，一種是把第 10 個放在二層積木的後面，一種是把第 10 個放在三層積木的後面，請問哪個才是正確的？

小軍：放在二層積木的後面。

師：為什麼？

小軍：因為才會被擋住，如果放在三層積木的後面會被我們看到，就不是這個圖了。 (觀 940104)

「積木從某一角度可能可以看到全部，但如果從另一個角度可能只看到一半的積木個數。」 (誌 930104-小威)

「利用積木來排成的圖形，從某一角度看圖形，說不定有些積木藏起來，會讓我們看不到。」 (誌 930104-小婷)

「有時候積木後面會有隱藏一個或二個，甚至更多個的積木，只是我們看不到而已。」 (誌 940104-小麗)

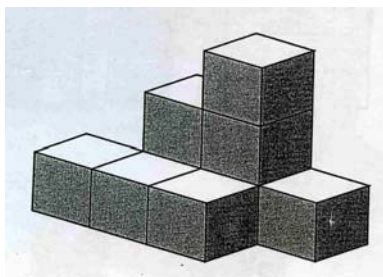


圖 1 「乾坤大挪移」活動之視圖

(四) 透過觀察某一面向的視圖再加上從不同角度觀看積木，學童能了解有相同視圖的形體，個數及位置不一定相同

在「我有透視眼」的活動中，研究者讓學童觀看如圖 2 的視圖，並要學童畫出其俯瞰圖，有 7 個學童畫出如圖 3，有 2 個學童畫出如圖 4。研究者接著再讓學童運用積木排出此視圖的其它形體，並要學童找出此視圖最少需要幾個積木及最多需要幾個積木。

透過從不同角度積木觀看積木，學童能夠了解因為觀看位置的不同，使得有些積木會被隱藏而看不見，因此雖然從某個面向有相同的視圖，但實際的的積木個數卻會有不同；因為有些積木是隱藏看不見的，所以具有相同個數的形體，它們的位置也不一定會完全相同。從以下上課觀察結果及學童在學習日誌上的寫作，可以驗證研究者的說法，例如：

師：請你們用積木排出如圖 2 的形體。（學童排好後）請問你們總共用了幾個積木？

小泰：12 個。

小婷、小岳、小維：14 個。

小秀：18 個。

小稜：16 個。

小威、小軍、小麗：17 個。

師：其中有人答案是不可可能的，請問是幾個？

小軍、小秀、小稜：12 個。

師：那至少應該有多個呢？我們一起來數。第一層至少有幾個？

多數學童：7 個。

師：第二層呢？

學童：4 個。

師：第三層呢？

學童：3 個。

師：所以整個形體至少需要多少個積木？

學童：14 個。

師：請問除了 14 個、16 個、17 個、18 個積木外，還有沒有其它答案？

學童：有。

師：請排出來給我看。（學童合力完成）請問有多少個？

學童：19 個。

師：還有沒有？

學童：有。(學童重新移動、堆疊)

師：請問有多少個？

學童：15 個。

師：所以我們可以發現，同一個視圖，可以用積木排出許多不同的形體，個數和位置都不一定相同。現在請你們排出這個視圖最多可以用多少個積木？

學童：(合力完成) 22 個。

師：可是我這個角度後面有些積木會被我看到，和這個視圖就不同了。

小岳：我這個角度就和視圖一模一樣。

師：真的嗎？我看看，果然沒錯。 (觀 940104)

「一種圖形(視圖)可以呈現不同的形體，因為斜斜的看有的會看不到，所以會有不同的答案。」 (誌 940104-小婷)

「把積木移到不同位置，看到的面還是一樣。」 (誌 931227-小麗)

從上述觀察結果可以發現，雖然研究者和學童所站的位置相同，但觀察積木時的角  
度卻有些微的差距，以致研究者能看到比學童還要多的積木，甚至一度以為學童只是在  
亂湊答案，經過學童的提示後，原來只要將我的觀察角度往左移個 1、2 公分，所看到  
的形體就和學童相同了。從這個活動裡，相信學童已經了解從某一面向有相同視圖，但  
積木個數及位置不一定相同，也澄清了研究者的盲點，以為站的位置相同就代表著觀察  
角度也相同，原來 1、2 公分的差距，也是會影響觀察結果的。

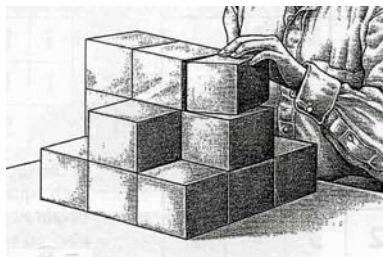


圖 2 「我有透視眼」活動之視圖

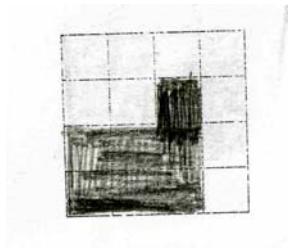


圖 3 7 位學童畫出之俯瞰圖

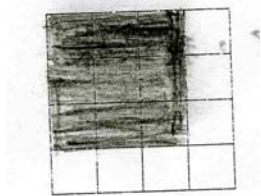


圖 4 2 位學童畫出之俯瞰圖

## 伍、結語

本研究旨在透過個案研究的方法，探討研究者發展之「體積空間能力教學活動設計」應用在實際教學時是否適切可行。經教學後發現，教學活動以具體操作進行教學，較能激發學童的學習興趣，也能使學童對於概念的學習有更深刻的印象。學童經由活動一—乾坤大挪移的具體操作後，已能了解在積木個數相同的情況下，就算俯瞰圖或視圖相同，積木位置不一定相同。再透過活動二—我有透視眼的具體操作後，學童了解到在積木個數不限且有相同的俯瞰圖或視圖的情況下，除了積木位置有可能改變外，積木的個數也有可能不相同。由以上的發現，顯示本研究「體積空間能力教學活動」的教學效果不錯，可提供教師們在體積教學時的參考。

## 參考文獻

- 吳貞祥 (1978)：兒童數、量與空間概念的發展。台北：台北市立女子師專。
- 許民陽、鄧國雄、卓娟秀、李崑山、殷炯盛 (1994)：國小學童對方向及位置兩空間概念認知發展的研究。台北市立師範學院學報，25，91-120。
- 張英傑主編 (2003)：國民小學數學教師手冊第九冊。臺南：南一。
- 黃瑞琴 (1991)：質的教育研究方法。台北：心理。
- 譚寧君 (1996)：面積與體積的教材分析。載於甯自強主編：八十四學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編，27-37。國立嘉義師範學院。
- Nickson, M. (2000) /詹勳國、李震甌、莊蕙元、戴政吉、侯美玲譯 (2004)：數學的學習與教學：六歲到十八歲。臺北：心理。
- Clements, D. H. and Battista, M. T. (1992) . Geometry and Spatial Reasoning. In Grouws, D. A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company. 420-464.
- Fuys, D., Geddes, D. & Tishchler, R. (1988) . The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*,3.
- Gal, H., & Vinner, S. (1997) . Perpendicular lines-what is the problem? *Proceedings of the 21<sup>st</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*,2,281-288.
- Sowell, E. J. (1989) .Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*,20,498-505.

How Do the Building Blocks Disappear~

The Teaching of Spatial Ability of Volume

Fang-Chi Lin<sup>1</sup> Ru-Fen Yao<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Tong-An Elementary School, Yunlin

<sup>2</sup>The Graduate Institute of Mathematics Education, National Chia-yi University

### Abstract

The purpose of this study is to develop teaching activities of space ability of volume, and help the establishment of spatial ability and the understanding two-dimensional graph and during the three dimensional physique similarities and differences, and discusses students in teaching activities learning performance. The researcher uses case-study and takes the sixth grade nine students in Pin-An elementary school, Yunlin as the research objects, and concrete manipulative materials stimulates students learning interests, and makes students understand the two-dimensional graph and the three dimensional physique similarities and differences.

Key words: spatial ability, teaching activities, volume