

# 完成九年一貫第一階段學童數常識表現之研究

李威進<sup>1</sup> 李茂能<sup>2</sup> 楊德清<sup>3</sup>

<sup>1</sup>台東縣利嘉國小

<sup>2</sup>國立嘉義大學國民教育研究所

<sup>3</sup>國立嘉義大學數學教育研究所

(投稿日期：93年12月2日；修正日期：93年12月20日、29日；接受日期：94年1月6日)

## 摘要

本研究旨在運用研究者所開發之「國小第一階段電腦化數常識測驗」，針對完成國小第一階段學習之四年級學童進行施測，以探討這些學童數常識之表現情形。因此，本研究以立意抽樣方式從全省公立小學中選取808位國小四年級學童參與本研究，進行電腦線上測驗。

研究結果顯示：

- 一、經多變項檢定結果指出，國小四年級學童在數常識各組成成份間的整體效果上具有顯著差異性存在，經事後成對比較 t-考驗顯示，學生在「基本意義」、「多重表徵」及「比較大小」上之表現比「數字的分解與合成」與「運算結果之合理性判斷」相對較好。
- 二、樣本學童在數常識各成分的表现皆不理想，但結果顯示樣本學生在「數字的分解與合成」與「運算結果之合理性判斷」之表現較差；此提供未來之教學與課程設計應更加強這兩方面之內容。

**關鍵詞：**第一階段、數常識、電腦線上測驗

## 壹、研究動機

法國數學家兼神經心理學家 Stanislas Dehaene (1997) 在其所著的 *The Number Sense: How The Mind Creates Mathematics* 一書中指出：數字支配了我們的生活。的確如此，食、衣、住、行、育、樂等日常生活的種種，如：食物的熱量、行車的速度或是最近流行的樂透彩等等，太多的資訊都必須用數字來加以描述或紀錄，甚至是溝通。因此，我們可以說是生活在數字之中。既然從小就接觸數字，兒童在學習數學的過程中，理應很快就能融入學習的情境之中，但事實並非如此，數學在學校中是最不受歡迎的學科之一；學者 Ekenstam (1977) 指出其中的原因：「當對於數字的意義缺乏瞭解時，學習數學必然會產生無法克服的障礙」。

數常識 (Number Sense) 強調有意義的學習，其重要性在各個先進國家的數學教育趨勢中可以窺知一二：

一、澳洲教育協會 (Australian Education Council) 於 1991 出版的「澳洲國家學校數學報告書」中提到：所有人皆需要發展好的數常識。

二、美國國家數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM]) 在 1989 及 2000 年出版的「學校數學課程和評量標準以及「學校數學原則與標準中，數常識皆出現在其所羅列的課程標準中，重要性不言可喻。

(一) NCTM (1989) 描述了具有良好數常識的兒童應具備以下特質：對數字的意義有非常深入的瞭解、可以在數字間發展多重關係、瞭解數字相對大小、知道運算對數字的相對影響、以及在生活環境中發展參考物，以測量一般的事物與情境。

(二) NCTM (2000) 則明確指出：在小學階段，發展數常識是數學教育中的核心課題之一；此外，數與計算本課程標準的核心內涵就是發展數常識能力。

三、第三次國際數學暨科學評量 (Third International Mathematics and Science Study, [TIMSS]) 在 1995 年及 1999 年分別對世界各國的數學及科學成就作評量，其中數學評量的內涵大致可區分成五項：1.分數及數常識、2.測量、3.資料表徵、分析與機率、4.幾何、5.代數。

綜合以上所述，我們不難發現，數常識已經在數學教育界獲得高度的肯定及重

視，不管是在設定目標或選定評量成就的項目，因為數常識呼應了數學學習應是一項意義化的經驗（NCTM, 1989）。

過去 15 年，「數常識」這個概念已在國外受到數學教育界的重視，國內有關數常識的研究亦日益增加。數常識的評定工具更是先有許清陽、楊德清與李茂能(2001)所發展之國小高年級數常識評定量表，為國內數常識測驗的編製跨出了第一步；後有李威進（2004）針對國小第一階段學童所發展的數常識測驗，而且皆具有相當好之信、效度與參考價值。

本研究的主要目的即是藉由研究者所之開發第一階段數常識測驗，針對國小第一階段的學童進行施測，以探討國小第一階段學童數常識表現情形。

## 貳、研究背景

### 一、數常識的意義

數常識已被認為是一項值得擁有與培養的特質（Hope, 1989），但是數常識就像普通常識（Common Sense）一樣，很難有一個非常明確或是固定的定義（Resnick, 1989; Reys, 1994; Sowder, 1992），不過我們仍可以從學者專家對數常識所做的討論與分析，對數常識作一個概括性的瞭解。

NCTM 於 1989 年所出版的課程與評量中也認為，數常識是一種對含有不同意義數字的直覺，更提出具有良好數常識的小朋友，具備有以下的特點：

#### （一）對數字的意義有良好的理解

例如：可以知道 1 和 2 中間有幾個一位小數。

#### （二）能發展數字間的多重關係

例如：理解 0.5 和  $\frac{1}{2}$  是相等的。

#### （三）瞭解數字的相對大小

例如：能分辨出 1509、150.9、501.9、950.1 四個數字當中，哪一個最大。

#### （四）瞭解運算對數字的影響

例如：知道「三十幾」和「三十幾」合起來的合理答案。

#### （五）能於生活中發展參考點的能力

例如：在「媽媽買了一個 199 元的模型給弟弟，買了一個 399 元的洋娃娃給妹

妹，付賬時，媽媽最少應該拿幾張 100 元的鈔票出來？」這個題目中，可以知道要用 200 和 400 作為參考點進行估算。

1989 年在美國聖地牙哥大學也針對數常識及相關議題舉辦了一場研討會，會議的重點之一就是討論數常識是什麼？學者 Sowder 在會後所出版的報告書中，提出他對數常識的看法，認為數常識就是：

- (一) 是一個擁有良好組織的概念網路，讓人們能夠連結數字及運算的特性：數常識是學習者能夠將新訊息與先前所獲得的經驗做邏輯性的連結 (Reys, 1994)。
- (二) 在進行數字的比較時，有能力瞭解數字的相對、絕對大小，能做出質與量的判斷，以及能夠發覺不合理的運算結果，而且可以用非標準的算則方式進行心算及估算。
- (三) 能用彈性及富創造性的方式解決含有數字的問題。
- (四) 是一項不容易被教也不容易被測量的特質。

國內亦有學者針對數常識加以解釋定義，楊德清 (2000, 2002) 認為數常識指的是個人對數字及運算一般性的瞭解，以及能以彈性的方式運用所理解的數學知識進行數學判斷並發展有用的策略以處理所面對的數字情境的一種能力。

綜合上述之論點，數常識可以解釋為個人對數字、運算、以及數字和運算所產生之情境的理解，此種理解包含了能夠以靈活與彈性的方法發展解題策略以處理數字和運算之問題，以及日常生活中包含數字與運算之相關問題，同時能夠判斷答案的合理性以及是否符合問題情境 (楊德清, 2002)。

## 二、數常識的理論架構

研究者根據國內外學者 (Thompson & Rathmell, 1989; Sowder, 1992; McIntosh, Reys & Reys, 1992; 楊德清, 2000, 2002; 許清陽, 2001; Yang, 2003) 所提出的數常識理論架構，歸納出本研究之數常識理論基礎：

- (一) 能瞭解數字的意義及關係。
- (二) 會比較數字大小。
- (三) 會分解與合成數字。
- (四) 能瞭解運算對數字的影響。
- (五) 能判斷答案合理性。
- (六) 會使用參考點進行估算。

研究者依上述之六個組成成份設計了 50 題的測驗試題，之後透過項目分析，刪除 CR（決斷）值及相關係數較低的試題之後，接著進行三次探索式因素分析。第一次因素分析，決定保留住五個因素，但因刪題後因素組型會跟著改變，因此進行第二次因素分析；在第二次因素分析後，確定了測驗中所有試題的因素組型，且因為五個因素彼此之間相關頗高，於是進行了第三次（二階）因素分析。第三次（二階）因素分析的結果，五個因素間又可抽取一個更高階的綜合性因素（即數常識）。最後經由驗證式因素分析得知，數常識結構模式與所收集到的資料頗為適配。以下即是此測驗最終分析出的五個理論架構：

- （一）瞭解數與運算的基本意義
- （二）數與運算的多重表徵
- （三）數字的分解與合成
- （四）運算結果之合理性的判斷
- （五）比較數字的相對大小

## 參、研究法

### 一、研究對象

本研究所選取的樣本國小四年級之學童，來自全省十個縣市共808人，係由研究者委託樣本學校的班級導師或電腦教師透過網際網路進行「第一階段電腦化數常識測驗」，樣本分布情形如表一。

表一：樣本分布統計表

	台北	桃園	新竹	台中	彰化	雲林	嘉義	台南	高雄	台東	合計
班級數	4	1	3	2	3	2	4	3	3	4	29 班
學生數	107	30	82	66	93	59	115	79	84	95	808 人

### 二、研究工具

本研究係採研究者所發展之第一階段數常識測驗，共分五個組成成份，合計有 25 個題目（如表二），其信、效度之說明如下：

表二：數常識正式測驗之試題分佈表

因素順序	命名	試題編號	題數
因素一	瞭解數與運算的基本意義	Q1、Q6、Q11、Q16、Q20、Q23	6
因素二	數與運算的多重表徵	Q2、Q7、Q12、Q17、Q21、Q24	6
因素三	數字的分解與合成	Q3、Q8、Q13、Q18、Q22、Q25	6
因素四	運算結果之合理性的判斷	Q4、Q9、Q14、Q19	4
因素五	比較數字的相對大小	Q5、Q10、Q15	3
合計			25

### (一) 信度

1.內部一致性係數：整份測驗的 Cronbach's  $\alpha$  值為 0.8526，說明了此份測驗具備良好的信度。

2.建構信度：整份測驗的建構信度為 0.805，表示整份測驗具有良好的建構信度。

### (二) 效度

本研究所採用「國小第一階段電腦化數常識測驗」之效度，分為專家效度和建構效度。專家效度則請三位在數學科有多年教學經驗之小學老師及數學教育相關之專家，針對測驗試題內容之周延與代表性進行審閱；建構效度則以探索及驗證式因素分析加以考驗，上述二種不同的指標皆說明了此測驗具備良好的效度。

## 三、資料處理

### (一) 資料整理

在完成整個電腦施測後，研究者將受試者原始資料自資料庫中轉出，把基本資料及作答不完整的部份予以刪除，再將原始資料轉入 SPSS 10.0 進行資料分析。

### (二) 資料分析

本研究利用單因子重複量數變異數分析來檢驗第一階段學童在數常識各組成份間之表現是否具有顯著差異，可用 Pillai's Trace、Wilks' Lambda、Hotelling's Trace 及 Roy's Largest Root 等方式進行顯著性考驗，如果具有顯著的差異，則進一步檢視效果值 (Effect Size) 及統計考驗力 (Power) 的大小，若效果值夠大的話，表示有

其實際應用上的價值，接著進行各個成分間的事後比較，以瞭解是由哪些組成成分造成的差異，反之則否。

## 肆、結果

### 一、數常識間表現差異情形

由於本測驗之每個成份中所包含的題數並不相同。因此，在進行各組成成份間的差異分析前，先利用 SPSS 求出所有受試者在五個成份的平均得分，即該組成成份中的每題得分加總之後除以該成分中的題數。接著進行單因子重複量數變異數分析，透過 SPSS 中一般線性模式的重複量數程式進行分析，表三為描述統計結果：

表三：國小四年級學生在數常識各組成成份之描述統計

因素順序	因素名稱	樣本人數	題數	平均分數	標準差
因素一	瞭解數與運算的基本意義	808	6	1.6073	1.0635
因素二	數與運算的多重表徵	808	6	1.6161	0.9594
因素三	數字的分解與合成	808	6	1.1056	0.8645
因素四	運算結果之合理性的判斷	808	4	1.0099	0.9226
因素五	比較數字的相對大小	808	3	1.4996	1.0545

註：滿分為 4 分

表三結果顯示四年級學生在本測驗的配對給分（答案對原因對 4 分、答案錯原因對 2 分、答案對原因錯 1 分）條件下，在各成份的平均得分均低於兩分。此研究結果顯示學生的數常識能力均相當弱，同時本結果亦與先前之一些研究結果（楊德清，2000，2002；Reys & Yang, 1998; Yang, 2003）相一致。此外，樣本學生在因素四（運算結果之合理性的判斷）這個組成成份的表現相對最差（平均數為 1.0099），此正顯示學生在此部分的能力最弱，本結果亦與許清陽（2001）的發現相呼應。

由表四之 Mauchly 球形檢定得知，Mauchly's W 的  $\epsilon$  值為 .895，且已達 .05 的顯著水準，表示已經違反球形假設（可能是樣本太大所導致）。但仍需檢視另外兩種檢定方式的  $\epsilon$  值，作為判定是否違反球形檢定的標準。從表四可知 Greenhouse-Geisser 與 Huynh-Feldt 兩種檢定方式的  $\epsilon$  值分別為 .936 及 .941，學者 Girden（1992）認為

Greenhouse-Geisser、Huynh-Feldt 兩種檢定方法的  $\epsilon$  值在.75以上時，表示未違反球形檢定的假設。

表四：Mauchly球形檢定

受試者內效 應項	Mauchly's W	近似卡方 分配	自由度	顯著性	Epsilon		
					Greenhouse- Geisser	Huynh- Feldt	下限
五個因素	.895	89.233	9	.000	.948	.953	.250

由表五多變項檢定可以知道，經過四種多變項顯著水準考驗方法之後顯示，無論是 Pillai's Trace、Wilks' Lambda、多變項顯著性檢定 (Hotelling's Trace) 或是 Roy 的最大平方根 (Roy's Largest Root)，F 值均為 130.183 ( $p=.000, \eta^2 = .393$ )，均已達 .05 的顯著水準，表示完成國小第一階段學習的學童在數字常組成成份間之表現展有顯著不同。除此之外，許多研究 (Borenstein, 1994, 1997; Goodman & Berlin, 1994; Nix & Barnette, 1998) 主張發現統計上的顯著性 (Statistical Significance) 之後，應再探討效果值 ( $\eta^2 = 1 - \Lambda$ ) 的大小，以確定其應用的顯著性 (Practical Significance)

(引自王國川, 2002)。經統計分析，本研究的效果值 ( $\eta^2$ ) 為 0.393 ( $1 - 0.607$ )，經與 Cohen (1988) 提出的大 (.40)、中 (.25)、小 (.10) 效果值比對之下，可以得知學生在數常識因素間的差異情形屬於中效果值，顯示這樣的結果在了解樣本學生在各主成分上有差異，可提共教師或研究者知道學生在哪一主成分較佳？或在哪一主成分較差？以便進行補救教學或者進行相關教材之修正與加強。在檢視表五多變項檢定中的統計考驗力為 1.0，產生此種結果的原因，可能是由於樣本過大所導致。

下述統計分析結果顯示，完成國小第一階段的學童在數常識組成成份間之表現具顯著差異性，至於是那些組成成份間具差異，則須再進行成份間事後比較才能得知。



表五：數常識因素多變項檢定

效應項	數值	F 檢定	假設 自由度	誤差 自由度	顯著 性	$\eta^2$ (效果值)	考驗力	
Pillai's Trace	.393	130.183	4.000	804.000	.000	.393	1.000	
五個 因素	Wilks' Lambda	.607	130.183	4.000	804.000	.000	.393	1.000
	Hotelling's Trace	.648	130.183	4.000	804.000	.000	.393	1.000
	Roy's Largest Root	.648	130.183	4.000	804.000	.000	.393	1.000

$\alpha = .05$

表六係樣本學童在「第一階段電腦化數常識測驗」各組成份間差異之 t 考驗結果，共有十對相互比較。根據Bray 和 Maxwell (1985)以及Rodger(1973) (引自陳正昌、程炳林、陳新豐、劉子鍵，2003) 之建議，多變量對比若用於事後比較，必須將 $\alpha$ 加以分割，每個對比的顯著水準應定為 $\frac{\alpha}{g}$  (g為對比次數)。因此，本研究將事後比較犯第一類型錯誤機率定為： $\alpha = .005 \left( \frac{.05}{10} \right)$ 。依此標準比對之下，從表六中的比較得知，數常識的五個組成成份配對比較，除第一組成份對第二組成份 (p=1.000)、第一組成份對第五組成份 (p=.094)、第二組成份對第五組成份 (p=.018) 及第三組成份對第四組成份 (p=.025) 無差異外，其餘均已達顯著水準。

表六：數常識測驗各因素之事後成對比較

I (因素)	J (因素)	平均數差異 (I-J)	標準誤	顯著性
1	2	-.009	.036	1.000
	3	.502	.037	.000
	4	.597	.039	.000
	5	.108	.041	.094
2	1	.009	.036	1.000
	3	.511	.032	.000
	4	.606	.033	.000

	5	.117	.037	.018
3	1	-.502	.037	.000
	2	-.511	.032	.000
	4	.096	.032	.025
	5	-.394	.036	.000
4	1	-.597	.039	.000
	2	-.606	.033	.000
	3	-.096	.032	.025
	5	-.490	.038	.000
5	1	-.108	.041	.094
	2	-.117	.037	.018
	3	.394	.036	.000
	4	.490	.038	.000

$$\alpha = .005 \left( \frac{.05}{10} \right)$$

## 二、討論

上述之統計分析指出：（一）完成國小第一階段數學學習的四年級學生，在五個組成成份中的平均分數偏低（<2）。（二）四年級學生在五個組成成份中的表現具顯著差異。（三）學生在瞭解數與運算的基本意義（第一成份）、數與運算的多重表徵（第二成份）及比較數字的相對大小運算（第五成份）三者間並無差異存在，顯示樣本學生在此三種能力的表現並無不同；數字的分解與合成（第三成份）與運算結果之合理性判斷（第四成份）亦是如此。（四）學生在瞭解數與運算的基本意義（成份一）、數與運算的多重表徵（成份二）及比較數字的相對大小運算（成份五）中的表現優於數字的分解與合成（成份三）與運算結果之合理性判斷（成份四）。

許清陽（2001）針對高年級學童有關數常識的研究中，高年級學生在「辨認數字大小的能力」中表現最好，其次是「以多重方式表徵數字的能力」，接著是「瞭解運算對數字的意義和影響的能力」，表現最差的則是「瞭解數字的意義和關係的

能力」及「發展計算策略與判斷答案合理性的能力」。

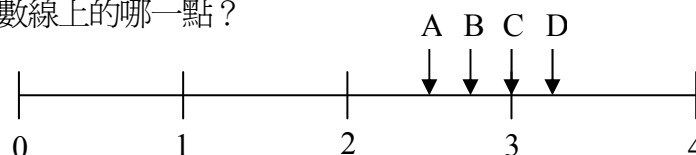
本研究與許清陽(2001)的研究結果相互比對之後可以發現，高年級學生在「辨認數字大小的能力」中表現最好，四年級學生卻是在「瞭解數與運算的基本意義」、「數與運算的多重表徵」及「比較數字的相對大小」表現最好。如此的差異，可能是因為學習內容的不同或是學生認知發展上的差異所導致；但四年級和高年級的學生卻又不約而同的在「合理性判斷」之表現最差，產生如此的結果，或許可以說明學生學了很多數學的知識與技能之後，也許僅止於會計算，但是並沒有真正的理解，所以遇到需要更進一步判斷答案或原因是否合理時，大多數學生的表現就失常了，這樣的結果，應值得教育相關單位重視與檢討。

### 三、「合理性判斷」試題中學生答題之分析

國小四年級學童在數常識各組成成份的差異情形，經過統計分析後，顯示四年級學童在合理性判斷這個成份的表現比較差，這樣的結果和許清陽(2001)的研究結果相呼應。以下選取本研究中合理性判斷此組成成分內之3試題，依學生的答題情況加以逐題進行深度分析，希望可從學生的選擇中發現學生表現不佳的端倪與原因。

(一) 題目 1：有一串數字如右：0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, \_\_\_\_, 3.5, 4.0，請判斷看看，

空格處應該是數線上的哪一點？



表七：題目 1 各項指標之分析表

選擇人數(百分比)	155 (19%)	162 (20%)	*412 (51%)	68 (8%)
答案選項	A	B	C	D
選擇人數(百分比)	原因選項 (遺漏值=11)			
120 (15%)	因為 A 點約是 2.5			
*206 (26%)	因為每次都增加 0.5			
97 (12%)	因為 2.5 的後面就是 2.8			
124 (15%)	因為應該有超過 3，但是沒有超過 3.5			
250 (31%)	因為是用猜的			

試題分析指標	難度	鑑別度	CR (決斷) 值	平均差異	內部相關
	0.5198	0.4455	14.349	1.74	0.4589

註：\*為標準之答案及原因

問題 1(表七)之主要目的在檢驗學生是否可以從一系列的數字中發現數列的組型，並找出空格所代表的正確數字，進而判斷數線上哪一點最合理，最能代表空格中的數字。從上表中之數據可以發現，約有 50%的學生可以找出正確的答案，似乎有將近一半的學生具備基本數型的能力，但進一步檢視原因選項時，卻只有 26%的人選擇了正確的原因，這似乎也反映出學生無法真正有效的進行合理判斷的能力。

約有 19%的學生選擇 A、20%的學生選擇 B 以及 8%的學生選擇 D，而選擇的理由是「A 點約是 2.5」、「2.5 的後面就是 2.8」或「猜的」，此正顯示學生無法發現數列的規律，因此不知道答案是 3，以致於無法判斷 2.5、2.8 或 3 點多是不合理的。測驗結果指出，超過一半以上的學生缺乏發現數型能力。但是在九年一貫數學領域課程綱要中（教育部，2000）強調數學課程應幫助學生發展發現數型的能力，顯然目前學生並未達到此基本能力，未來的課程發展與設計亦應增強相關概念的發展。

(二) 題目 2：「三位數」加「三位數」之後的結果（和）是：

表八：題目 2 各項指標之分析表

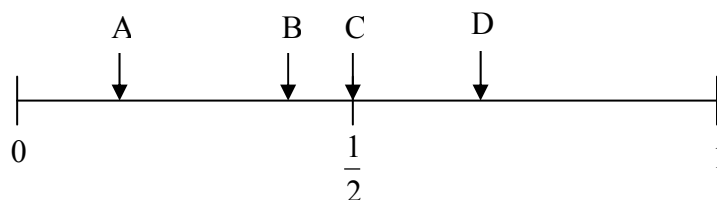
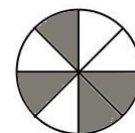
選擇人數	119 (15%)	124 (15%)	*286 (35%)	271 (34%)
答案選項	一定是三位數	一定是四位數	可能是三位數或是四位數	是六位數
選擇人數	原因選項 (遺漏值=8)			
80 (10%)	因為三位數加三位數一定還是三位數			
*178 (22%)	因為數字小加起來還是 3 位數，數字大就會變成 4 位數			
95 (12%)	因為三位數加三位數會變成四位數			
263 (33%)	因為 $3+3=6$			
184 (23%)	因為是用猜的			

試題分析指標	難度	鑑別度	CR (決斷) 值	平均差異	內部相關
	0.3762	0.4653	12.182	1.67	0.4408

註：\*為標準之答案及原因

問題 2(表八)的目的在探究學生是否可以在沒有提供實際的數字操作下，可以進行「三位數」加「三位數」的敘述進行簡單的推理，進而判斷出正確答案及原因選項。從以上資料發現約有 $\frac{1}{3}$  (35%) 的學生選擇了正確的答案，但可惜的是選擇正確原因選項的比例只有 22%。而且令人感到驚訝的是，有 $\frac{1}{3}$  的學生選擇了「六位數」這個答案。很明顯的，學生無法進行有意義的思考，所以無法判斷答案的不合理，其中多數的學生應是僅看到題目中的兩個「三」即加以選擇，認為三位數加三位數就是六位數。顯然這些學生並不瞭解題意，只是任意運用整數的加法算則。除此之外，亦有 15% 的學生認為三位數加三位數一定還是三位數；15% 的學生認為三位數加三位數會變成四位數。因此，由學生選擇錯誤選項的數據指出，多數學生思考問題時，常常僅看到問題的表面，鮮少更進一步思考所選答案或原因的合理性。

(三) 題目 3：請選出陰影部分所代表的分數，在數線上代表的位置。



表九：題目 3 各項指標之分析表

選擇人數	116 (14%)	195 (24%)	*253 (31%)	225 (28%)
答案選項	A	B	C	D
選擇人數	原因選項 (遺漏值=19)			
63 (8%)	因為比較靠近 0			
128 (16%)	塗 4 格變成 $\frac{4}{8}$ ，超過 $\frac{1}{2}$			
137 (17%)	ABCD 有 4 個，黑色部分也有 4 個，所以選第 4 個			
*172 (21%)	因為加起來有 4 個陰影，占全部的一半			

289 (36%) 因為是用猜的

試題分析指標	難度	鑑別度	CR (決斷) 值	平均差異	內部相關
	0.3416	0.2376	10.112	1.28	0.4361

註：\*為標準之答案及原因

題目 3(表九)的主要目的在測驗學生是否可以針對圖形陰影部分所代表的分數進行判斷，並思考數線上哪一點最能代表其所認知的分數。上述資料顯示，僅有約 $\frac{1}{3}$ 的學生選擇了正確答案，但由原因選項中可以得知，並非所有答案選對的學生，亦可以將正確原因點選出來。本問題同時在考驗學生基本等值分數的概念。雖然，等值分數的概念在第二階段才會介紹，本問題略顯困難；但研究者認為若學生的分數概念清楚，且設計時亦刻意選擇較簡單之分數 $\frac{1}{2}$ ，因此本問題學生仍可運用分數概念解決。研究發現，有將近 21%的學生選擇正確的原因選項。同時，高達 66%的學生給予錯誤的答案，從原因選項中亦可以發現，原因選項選擇「用猜的」比例仍偏高。另外有 16%的學生選「塗 4 格變成 $\frac{4}{8}$ ，超過 $\frac{1}{2}$ 」，應是認為 $\frac{4}{8}$ 大於 $\frac{1}{2}$ ，由此更可以瞭解學生無法進行合理性判斷的原因，即是對分數不夠瞭解所導致；17%的學生選「ABCD 有 4 個，黑色部分也有 4 個，所以選第 4 個」，學生無法判斷這個原因選項和問題毫不相關，或許亦可以說明學生在合理性判斷的能力上確實非常缺乏。

綜合以上所述可以瞭解學生在合理性判斷中表現較為差的原因，或許有以下幾點：(一) 學生僅從表面思考問題。(二) 學生缺乏反思的能力。(三) 學生的基礎數學知識不足。

## 伍、結論與建議

### 一、結論

(一) 四年級學童在數常識所有成分的表現都差，但統計分析結果顯示在「基本意義」、「多重表徵」及「比較大小」上之表現比「數字的分解與合成」與「運算結果之合理性判斷」相對較好。

透過多變項檢定可以得知，四年級學童在數常識各組成成份間的表現有差異，且由效果值 ( $\eta^2$ ) 及統計考驗力更可以瞭解，這樣的現象 (或差異) 具有實質 (際)

上的意義，並非只是統計數據上的顯著性差異而已。最後利用最小平方法（LSD）進行事後成對比較更可以發現，學生在成份一（瞭解數與運算的基本意義）、成份二（數與運算的多重表徵）及成份五（比較數字的相對大小運算）中的表現比成份三（數字的分解與合成）與成份四（運算結果之合理性判斷）相對較好。

## （二）學童在合理性的判斷思考上表現不佳

學者 Dougherty 與 Crites(1989)指出，具備良好數常識的解題者在解題過程中，會根據題意來預設合理答案的可能類型，亦能根據答案來拒絕不合理的答案。但本研究與許清陽（2001）的研究結果均顯示，不管是四年級或是五、六年級的學童，在數常識的五項組成成份中，表現最不理想的皆是對答案或結果進行「合理性的判斷」這個組成成份，這也顯示國內學童在這方面的能力較弱。上述之結果是否顯示樣本學生在 Brown(1987)對後設認知之調節與監控的能力部份較弱，則需進一步之研究加以驗證。

## 二、建議

### 1. 數常識應正式明列於課程綱要的能力指標中

數常識這個概念自從被提出之後，獲得許多國家的重視，在其有關數學教育的報告書、課程標準中，均將「數常識」列為重要的發展目標（Australian Education Council,1991; NCTM, 1989, 2000）。因此，建議教育主管單位未來應將數常識列入能力指標中，並指出其重要性。

### 2. 教師應加強學生反思能力的培養

學童在數常識中有關合理性的判斷表現不佳，因此，建議教學現場的老師，除了教導學生正確快速的計算出答案之外，亦應培養學生對其所算出的答案進行反思的能力，藉此判斷答案的合理性。例如：本研究中的題目 5：小智今年 10 歲，他的身高是 150 公分，請問正常的話，他在 20 歲的時候，身高大概是幾公分？多數學生直接就是  $150 + 150$  等於 300 公分，如果這些學生在解題結束後，可以進行反思的動作，或許就能發現所算答案的不合理性了。

## 誌謝

本研究蒙國科會專題研究計補助，計畫編號 NSC 92-2521-S-415-002，特誌申謝；文中所提論點純屬作者個人之意見，並不代表國科會立場。

## 參考文獻

- 王國川 (2002)：圖解 SAS 在變異數分析上的應用。台北：五南。
- 教育部 (2000)：數學學習領域 (第一階段)。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。
- 許清陽 (2001)：國小高年級學童數常識發展之研究。嘉義：國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文 (未出版)。
- 許清陽、楊德清、李茂能 (2001)：國小高年級學童數常識評定測驗編製之研究。科學教育學刊，9 (4)，351-374。
- 陳正昌、程炳林、陳新豐、劉子鍵 (2003)：多變項分析方法－統計軟體應用。台北：五南。
- 楊德清 (2000)：國小六年級學生回答數常識問題所使用之方法。科學教育學刊，8 (4)，379-394。
- 楊德清 (2002)：從教學活動中幫助國小六年級學生發展數常識能力之研究。科學教育學刊，10 (3)，233-260。
- 李威進 (2004)：資訊融入九年一貫數學領域第一階段數學測驗之研究－以數常識為例。嘉義：國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文 (未出版)。
- Australian Education Council. (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*. Melbourne: Curriculum Corporation.
- Brown, A. L. (1987). *Metacognition, executive control, self-regulation and other more mysterious mechanisms*. In F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, Motivation, and Understanding* (pp.65-116). Hillsdale, N.J. :Erlbaum.
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). New York: Academic Press.
- Dougherty, B. J. & Crites, T. (1989). Applying number sense to problem solving. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 22-25.
- Ekenstam, A. (1977). On children's quantitative understanding of numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 317-332.
- Girden, E. R. (1992). *ANOVA: Repeated Measures* (Sage university paper series on



- qualitative applications in the social sciences, 84), Newbury Park, CA: Sage.
- Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. *Arithmetic Teachers*, 36(6), 12-16.
- McIntosh, A., Reys, B.J. & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12, 2-8.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Resnick, L.B. (1989). Defining, assessing, and teaching number sense. In J. T. Sowder, & B. P. Schappelle(Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp.35-39). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 1(2), 114-120.
- Reys, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwan, *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 225-237.
- Sowder, J. T. (1989). Introduction. In J. T. Sowder, & B. P. Schappelle(Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp.1-5). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, & R. Hatterp (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp.1-51). Hillsdale, NJ : Erlbaum.
- Stanislas Dehaene (1997). *The number sense : How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University.
- Thompson, C. S., & Rathmell, E. C. (1989). By way of introduction. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 2-3.

Yang, D.C. (2003). Teaching and learning number sense—An intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education. 1(1)*, 115-134. (NSC 90-2521-S-415-001)

# Investigating the Number Sense Performance of Students Who Had Completed the Mathematics Curriculum in Grades 1 to 3

Wei-Jin Li<sup>1</sup> Mao-neng Fred Li<sup>2</sup> Der-Ching Yang<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Taidong County Li-jia public elementary school

<sup>2</sup>Graduate Institute of elementary and Secondary Education,  
National Chiayi University

<sup>3</sup>Graduate Institute of Math Education, National Chiayi University

## Abstract

The main purpose of this study was to assess the number sense performance of students who had completed the mathematics curriculum in grades 1 to 3 in Taiwan through the computerized number sense scale developed by Li (2004). Therefore, 808 fourth graders, from public elementary schools, including cities, country and rural areas of Taiwan, participated in this study.

Results indicated that there is a significant difference among the number sense components for the fourth graders. Posteriori comparisons showed that sample students had better performance on “basic meaning of numbers”, “multiple representations of numbers” and “comparing the number magnitude” than “judging the reasonableness of computational results” and “decomposing and composing numbers”. Moreover, these students have poor performance on “judging the reasonableness of computational results” and “decomposing and composing numbers”. This indicates that future teaching should emphasize on these areas.

Key words: Grade 1 to 3, Number sense, Computerized on-line test.