一位小五學生解分數單位量等分割問題的表現

洪繼賢　　劉祥通
國立嘉義大學數學教育研究所

（投稿日期：93 年 3 月 24 日；修正日期：93 年 5 月 26 日；接受日期：93 年 5 月 28 日）

摘要

本研究旨在探討一位小五學生在分數單位量等分割問題上的解題表現。研究方法為個案研究，採半結構式晤談法進行訪談。訪談問題分為明確的單位量與暗隱的單位量兩部份，每部份各 3 題，共 6 題。重要發現如下：（1）在明確的單位量試題上，雖有較好的表現，但在畫不同單位分數時，沒有維持「單位量的等長性」。（2）在暗隱的單位量試題上，他忽略了單位量的大小關係，直接從倍數判斷，以致解題失敗。

關鍵字：單位量、等分割、分數、解題

壹、緒論

分數在許多小朋友的眼中，只是分子在上、分母在下的一個符號，它能做加、減、乘、除的運算，如此而已，在日常生活之中便一無用處。然而，分數是國民小學數學課程中的一個重要概念，與除法、小數、百分率、比、比率與機率等概念關係密切，這些題材在國小數學教材中佔有相當重要的地位，且關聯到國中教材。因此，在國小階段，分數是重要的概念之一，也是往後數學學習的基石，所以分數有如基礎數學與高深數學間的分水嶺（劉秋木，1996）。既然分數如此重要，但分數的學習對學童而言卻是困難重重。除了因爲分數本身具有多重的意義，如：「部份/整體」（連續量）、「子集/集合」（離散量）、運算子、商、比值、與量數；此外，學童一直停留在過去處理整數的數學方法，導致在分數學習上有著難以克服的困難與迷思。

分數起源於分割活動，用來解決不滿一個單位量的數值問題（呂玉琴，1996），也是等分割一物件活動的紀錄與結果(甯自強，1993)。解分數問題時，無論是處理「部份/整體」意義、「子集/集合」意義、比的意義的分數問題、或是將分數視爲數線上的一個點的值，最重要的一件事就是確認單位量（呂玉琴，1994）。因此，單位量指認是解分數單位量等分割的問題中一個極重要的關鍵。

但是，學生在解分數問題的過程當中，往往只注意題目所賦予的數值，如$\frac{1}{2}$與$\frac{1}{3}$，根據題目的解題需求，可能直接比較分數大小（$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$）作爲解題的依據，卻忽略了最重要的一件事，就是單位量的指認。而單位量指認的問題又有難易之分，例如「小琪買帽子花了她$\frac{1}{2}$的零用錢，買圍巾花掉她的$\frac{1}{3}$的零用錢，請問哪一種東西比較貴？」，此問題是明確單位量（小琪的零用錢）的問題；而「小英拿她自己零用錢的$\frac{1}{2}$去買糖果，小明拿他自己零用錢的$\frac{1}{3}$去買糖果，請問小英與小明誰花的零用錢多？」，此問題是暗隱單位量（小英的零用錢與小明的零用錢）的問題。對於這樣的問題，學生更容易忽略了單位量可能不同。因此，期望學生

解題時能注意並正確指認出單位量就愈顯得格外困難。

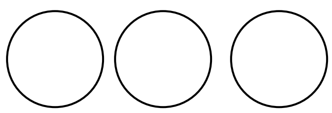
由此可知，單位量的明確性確實是影響解題成功與否的重要因素之一。因此，研究者試著以明確單位量與暗隱單位量兩種不同類型的分數問題，來探討學生在分數單位量等分割問題上的解題表現。

貳、文獻探討

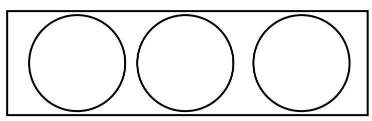
爲了回應上述研究問題，文獻探討分爲單位、單位量與單位數、與單位量指認三部分作介紹，以下分別敘述之：

一、單位

當我們測量一個量有「多少」的同時，需要決定並使用一種「單位」來測量這個量有多少。Euclid 說過：「所謂的單位是指存有而被稱爲一的事物」。兒童能否找到適當的單位，將指定的部分量分盡，再利用這個單位重組成全部或集合，這種能力即爲「單位形成能力」，此能力是兒童能否解決分數問題的關鍵（Saenz-Ludlow, 1994；1995）。Lamon（1999）提出所謂的單位就是一個物件，可分爲「單項單位」（singleton unit）與「集聚單位」（composite unit）。以買披薩爲例：「單項單位」可以爲單一披薩，即爲一單位(one－unit)；或大於一個以上，如三個，則此時即爲三單位(3 one－units or 3 units)。若一袋冷凍的披薩內有三個，則此時所購買的一袋(1 three-unit)即爲「集聚單位」。而同樣的一個量，所測量的值會隨著單位的不同有所改變，其值的大小，就要視單位的選擇。舉例來說：



單項單位：3 one-units



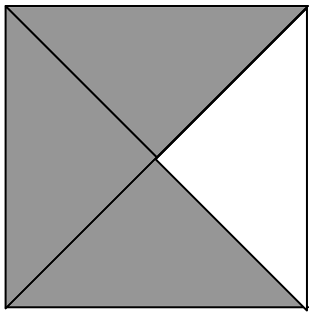
集聚單位：1 three-unit

此時的單項單位是以「個」爲單位，有 3 個披薩；而集聚單位則是以「袋」爲單位，有一袋披薩。如果吃掉了 2 個披薩，以「個」而言，是吃了 2 個披薩；若以「袋」而言，則是吃了$\frac{2}{3}$袋的披薩。2 個披薩卻有著 2 與$\frac{2}{3}$兩種大不相同的值，

其原因就取決於單位的不同。因此，單位的型態可說是千變萬化，所測量出的值也會隨著單位的不同而不同，就端看自己如何去選擇。

二、單位量與單位數

單位量在數與量的概念中佔有很重要的地位，Gauss 提出單位量的概念，當為了獲得一個與一待測定量相等的量時，一個已知量，或是此單位的一個被等分割部分，可重複累積複製此被界定量（甯自強，1998），此已知量即為單位量，所需被重複纍積的次數為單位數。換言之，單位量即為度量的標準，表示以某一量為基本單位，可能是以 1 為基本單位，亦可能是以非 1（如大於 1 的數或分數）為單位；而所謂的單位數則是表示有幾個基本單位量。例如 5 個梨子中，以「個」當作單位，則「1」是單位量，「5」是單位數；二打鉛筆中，以「打」為單位時，「打」或「12」是單位量，「2」是單位數 （台灣省國民學校教師研習會，1996）。又如右圖所示，如果將整個正方形視為一個基本單位，則灰色面積則為$\frac{3}{4}$個基本單位量，此時是以 1 為基本單位，$\frac{3}{4}$為單位數；反之，若將$\frac{1}{4}$個正方形視為一個基本單位，則灰色面積則為 3 個基本單位量，也就是以$\frac{1}{4}$為基本單位，3 為單位數。亦即，可將灰色面積看成$\frac{3}{4}$個正方形，也可以看成 3 個$\frac{1}{4}$正方形。



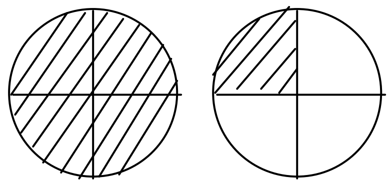
而單位量與單位數之間的角色可以互換，以上圖灰色面積為例，若以「正方形」為單位，則「1」是單位量，「$\frac{3}{4}$」是單位數；若以「$\frac{3}{4}$個正方形」為單位，則「$\frac{3}{4}$」為單位量，「1」為單位數，這就是單位量與單位數之間的互換。

三、單位量指認

學童在處理部分/整體，子集/集合或數線的分數問題時，常常會有指認單位

量的困難。Figueras（1989）發現學生解「給四堆橘子，圈出其中二堆中的一部分，問圈起來的橘子占全部的多少？」，學生誤以爲圈起來的二堆橘子的個數爲單位量，忽略了四堆橘子的總個數才是單位量。因此，欲要解分數問題必須得能指認出「單位量」，因此能夠指認整體爲一單位的能力就顯得非常重要。

根據 Mack（1990）的論述：「茱莉訂了兩個披薩，斜線部份是他吃掉的，請問茱莉共吃了多少個披薩？」，正確答案是「$\frac{5}{4}$」，但有些學生回答「$\frac{5}{8}$」，



理由是「全部有 8 片，斜線有 5 片」。因爲學生將兩個披薩看成一個整體（單位量），以致回答「$\frac{5}{8}$」並不令人感到意外。因爲單位量的指認不同，學生的答案也就不同。這是國小學生學習分數時容易發生的迷思，尤其當兩個以上的連續量存在時，整體是一個集聚單位或是數個單項單位，如何正確地指認出「單位量」，對學生而言更是難上加難。分數可以代表某一單位量的部分，單位量不相等，其部份不能比較。單位量的問題有時是隱含在問題的情境當中，例如「$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$」的情境時，出題者就隱含著$\frac{1}{2}$與$\frac{1}{4}$兩者原有的單位量是相等的假設（劉秋木，1996）。Lamon（1999）的論述強調：一個問題的情境或文字安排，決定了單位量的某種意義，有些可能明確，有些可能是暗隱的，情境的明確與否往往影響了學生的解題表現。

Hart（1981）曾以下列問題來了解英國中學生對單位量指認的能力，問題是「瑪莉花了她的零用錢的$\frac{1}{4}$，約翰花了他的零用錢的$\frac{1}{2}$，瑪莉可能比約翰花的錢多嗎？」。根據以上的問題，結果發現有 1.6%的 12 歲學生能回答可能，並說明正確的理由；有 32.1%的學生誤認爲瑪莉的錢比約翰的錢多就有「可能」；41.5%的學生認爲不可能，因爲$\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$。楊壬孝（1989）以同樣的問題在國內對國小高年級的學生測驗，結果發現台灣的 11、12 歲的學生答對率分別只有 3%、15%。由此研究發現，學生往往忽略了「單位量」的大小，只藉由題意所敘述的數字做

大小的判斷，學生對於單位量的指認還是存著相當大的迷思。

參、研究方法

本研究屬於個案研究，採用工作單（task）與半結構晤談法（semi-structed interview）進行訪談，從單位量指認的觀點，探討一位國小五年級學生解單位量等分割問題的表現。本章共分爲研究情境與研究參與者、研究者角色、與資料分析三部分，以下分別敘述之：

一、研究情境與研究參與者

研究者採用立意抽樣的方式，有目的地選取數學成績中上的學生當作個案來進行研究。參與本研究的個案鍾小澤（假名），是一位國小五年級的學生，所就讀的學校是南部一所都會型的小學，所接受的數學教材是康軒版，對數學頗有興趣，各科的表現也都非常平均。個性較爲內向，但研究者與鍾小澤熟識多年，也曾經當過他的家教老師，彼此之間的互動關係不錯，因此鍾小澤在口語表達能力上沒有問題。

研究者訪談前曾問鍾小澤：「你零用錢的$\frac{1}{5}$可以買 1 枝原子筆，已知原子筆 1 枝 8 元，請問你的零用錢有多少元？」，他透過畫圖的方式（如圖 3-1），並回答「每一份都是$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$可以買一枝筆，全部是$\frac{5}{5}$，所以可以買 5 枝筆」與「每一份都是$\frac{1}{5}$，每一等份 8 元，全部有 5 份，所以有零用錢 40 元」。

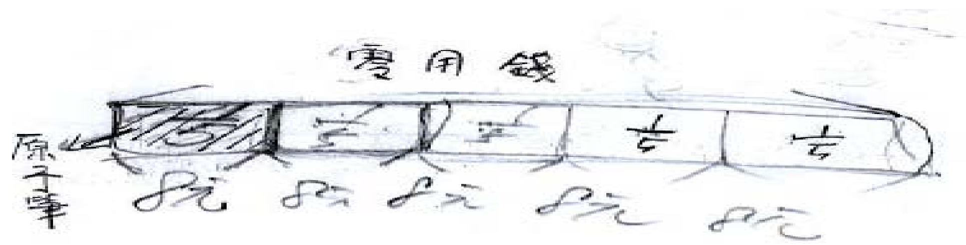


圖 3-1

透過作圖，鍾小澤能將整個零用錢視爲「1」而予以等量分割（如圖 3-1），

並了解每一等份的意義與大小（每一份都是$\frac{1}{5}$，每一等份 8 元）。從他畫圖時明確等分的「動作」，可以發現他似乎已具有等分的概念，且從已知的「部份（8 元）」求出「整體（40 元）」，他似乎掌握了分數的「部份/整體」關係。

由於鍾小澤已具備上述的能力，爲了探討分數單位量等分割問題，尤其單位量是暗隱的情況，因此研究者決定以他作爲受試與受訪的對象。

就教育研究領域而言，個案研究（case study）是指針對一個人的行爲進行深入研究的過程，此過程須透過各種方式及管道蒐集資料，加以分析整合，以了解個案問題的成因。因此，在本研究當中，研究者以分數單位量爲架構，用不同情境（單位量相等與單位量未必相等）的問題，透過工作單與訪談的方式，探討小澤在單位量等分割上的解題表現。

二、研究工具

本研究乃運用研究者角色與研究問題來收集資料，以下分別敘述之：

（一）研究者角色

在質的研究中，研究者即研究工具（The researcher is the instrument）（Guba & Lincoln, 1981）。因爲研究者在實施質的研究時，必須廣泛的使用自己的經驗、想像、智慧、和情感，以發現與資料呈現之類型相似的經驗（黃瑞琴，1991）。因此，研究者在研究當中，扮演著訪談個案的角色，透過半結構式的訪談方式，與個案產生互動的關係。

在解工作單問題的過程中，當鍾小澤解題正確，研究者根據其自發性的解法問他「爲什麼？」，促動他思考整理出自己的想法後表達出來。而當他解題失敗的同時，研究者於是介入，幫他搭起學習的鷹架，適時提出問題或要求舉例，製造認知衝突的情境，讓他產生認知失衡，以激發他更深一層的思考，尋求認知的平衡，促進認知的發展。如此一來，便可以獲得鍾小澤對這些數學概念所擁有最徹底的思維，以作爲研究者探討鍾小澤在單位量指認上的重要依據。

在訪談的過程裡，研究者除了錄音外，也會運用研究者所學習過的方法論技巧來收集資料，亦即在訪談的過程當中會交叉檢核（cross checks）個案的談話，也就是以不同的方式持續問學生相似的問題，藉以檢核學生在不同時間談到相同概念時，其談話內容的一致性。

（二）研究問題

本研究是運用半結構式晤談法進行訪談，而訪談是依訪談導引進行。訪談導引是一系列用來在訪談進行中探索的問題，是作爲訪談進行的方向，以確信與研究問題相關的主題都有被含括在內，在實際訪談時，可以因應特定的研究對象調整問題的順序（黃瑞琴，1991）。

本研究先以工作單問題讓鍾小澤作解題的工作，工作單的內容是根據劉祥通（2004）所設計的問題，分爲明確單位量與暗隱單位量兩部分，每一部分各 3 題，共 6 題，讓他作自發性的解題；研究者再針對鍾小澤的解題過程，作爲訪談的導引，以半結構的訪談方式，探討鍾小澤在分數單位量等分割上的解題表現。

三、資料分析

本研究是以個案研究從事資料的蒐集，研究者以工作單解題表現與訪談的內容作爲研究用的資料。工作單的解題表現，主要是呈現鍾小澤的自發性解題爲何。爲了適時追本朔源，更清楚了解鍾小澤的真正想法，研究者針對他的自發性解題，進行深入的訪談。訪談的主要目的是爲了瞭解鍾小澤的思維歷程，從對話的過程中，了解其思考、推理、最後解題成功與否。

在訪談的過程當中，亦使用錄音機錄音。研究者將錄音帶的資料全部轉成逐字稿，依次序將逐字稿的內容以阿拉伯數字編碼，例如以 101 表示第一個問題的第一句話。研究者將轉錄的資料進行原案分析與歸納，再賦予此歸納一個敘述標籤來呈現鍾小澤對此單元的某種解題策略與表現，最後把所有賦予標籤的歸納整合起來，作爲形成主題之依據。

而資料分析的考驗方式是採三角測量法，以工作單的解題紀錄與訪談的內容作爲資料收集的主要來源，又爲了提高分析者的信度，本研究之資料再經第一位研究者分析之後，會再由第二位研究者進行確認。

肆、研究結果

研究結果分爲明確單位量與暗隱單位量兩部分，分別說明如下：

一、明確單位量

（一）能根據整體面積相等回答其一半的面積也相等

原案一

評量目標：

能根據長方形面積相等，判斷各佔一半的斜線面積亦會相等。

101 師：下圖是兩個相同面積的長方形，請問斜線面積有一樣大嗎? 爲什麼？

102 生：一樣大，因爲兩個斜線部份都是長方形的$\frac{1}{2}$（如圖 4-1）。

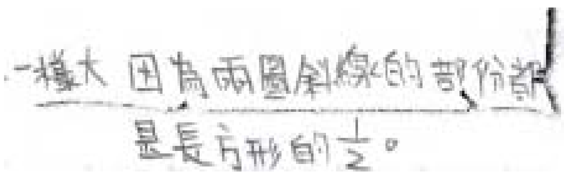


圖 4-1：鍾小澤說明斜線面積爲長方形的$\frac{1}{2}$

103 師：好，第一個長方形的斜線面積是多少？

104 生：長方形的$\frac{1}{2}$。

105 師：那第二個呢，斜線面積是多少？

106 生：長方形的$\frac{2}{4}$。

107 師：那爲什麼會相等？

108 生：$\frac{2}{4}$約分是$\frac{1}{2}$，各佔長方形的$\frac{1}{2}$，長方形面積相等，所以斜線面積相等。

分析一

在原案一當中，由於題目明確表示單位量相等（兩個相同面積的長形），鍾小澤利用部份整體的概念進行解題，說明兩了兩個斜線面積各佔長方形$\frac{1}{2}$（行號102），並利用等值分數（約分）來說明兩斜線面積各佔長方形的$\frac{1}{2}$，長方形面積相等，因此斜線面積相等（行號 108）。

（二）直接利用擴分比較兩者大小

原案二

評量目標：

在相同單位量的條件下，鍾小澤能比較其部分的大小。

201 師：嘉兒到書店去買素娜的生日禮物，買一頂小花帽要花掉他$\frac{1}{3}$的零用錢，買一條圍巾要花掉他$\frac{1}{4}$的零用錢，請問哪一種東西比較貴？爲什麼？

202 生：小花帽（擴分比較，如圖 4-2）。

203 師：爲什麼？

204 生：小花帽要花掉$\frac{4}{12}$的零用錢，圍巾要花掉$\frac{3}{12}$的零用錢，$\frac{4}{12} > \frac{3}{12}$，所以小花帽比較貴。

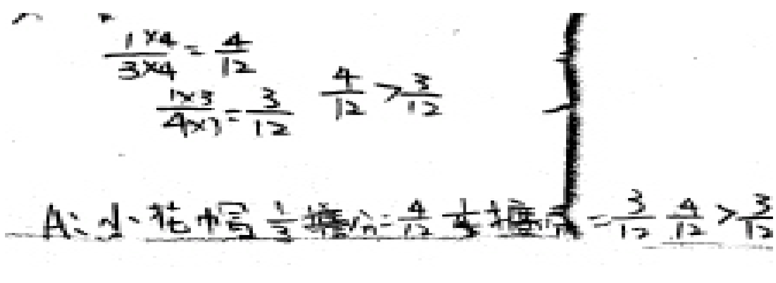


圖 4-2：鍾小澤以擴分方式說明小花帽比圍巾貴

205 師：有沒有其他的方法呢？

206 生：$\frac{1}{3}$比$\frac{1}{4}$大。

207 師：爲什麼？

208 生：因爲分子相同，分母愈大值愈小。

209 師：爲什麼？

210 生：因爲一個東西，分給愈多人，每個人得到的就愈少。

分析二

原案二與原案一都是單位量相等的題目，原案二當中的單位量是嘉兒的零用錢顯得較爲抽象（未說明有多少零用錢），不若原案一長方形面積那樣的具體。在解題的過程當中，鍾小澤似乎是受到題目「請問哪一種東西比較貴」的影響，所以直接去比較兩分數的大小。從行號 202 來看，他是以擴分的方式做分數大小的比較，並說明小花帽比較貴的原因（行號 204）。當研究者反問「有沒有其他的方法呢？」，鍾小澤能回答$\frac{1}{3}$比$\frac{1}{4}$大，並說明「一個東西，分給愈多人，每個人得到的就愈少」。

鍾小澤雖能透過「通分比較大小」以及了解「分子相同，分母愈大值愈小」，但研究者認爲，鍾小澤也許是受到學校或安親班教學的影響，而使用約定成俗的解題方式。雖能說明「一個東西，分給愈多人，每個人得到的就愈少」，但或許是受到單位分數$\frac{1}{3}$與$\frac{1}{4}$意義的影響，因此，並不足以說明鍾小澤能察覺單位量爲嘉兒的零用錢。

（三）爲求作圖上的準確卻忽略了將相同的單位量視爲固定的量

原案三

評量目標：

能從任一固定之單位長，做任意等份的分割，並作分割後大小之比較。

301 師：媽媽買了一條線，請畫出這條線的$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{5}$。

302 生：(兩線段不一樣長，如圖 4-3)

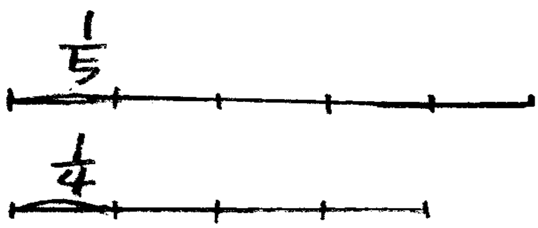


圖 4-3：鍾小澤表徵等長的$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{5}$

303 師：這樣對嗎？

304 生：(懷疑中……沒有回答)

305 師：$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{5}$誰比較大？

306 生：錯了，$\frac{1}{4}$比較長。

307 師：你知道錯在哪裡嗎？

308 生：錯在兩條線不一樣長，應該要一樣長。

309 師：那你再畫一條線的$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$。

310 生：（如圖 4-4）

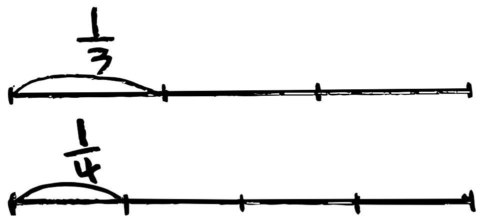


圖 4-4：鍾小澤表徵一線段的$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$

311 師：哪一段比較長？

312 生：$\frac{1}{3}$。

313 師：爲什麼？

314 生：因爲同樣的線分成 3 段會比分成 4 段長。

分析三

鍾小澤一開始用兩條線來表徵$\frac{1}{4}$與$\frac{1}{5}$，也就是畫出「4 公分的 1 公分」代表

$\frac{1}{4}$，「5 公分的 1 公分」代表$\frac{1}{5}$，存有相同單位量卻不等長的迷思（如圖 4-3）。於是研究者先透過比較$\frac{1}{4}$與$\frac{1}{5}$的大小（行號 305），製造認知衝突的機會，幫助他發現兩線段必須等長，才能做分割後大小的比較。之後，研究者再要求鍾小澤畫一次$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$（行號 309），他也能夠畫圖正確（如圖 4-4），並說明「同樣的線分成 3 段會比分成 4 段長」（行號 314）。

二、暗隱單位量

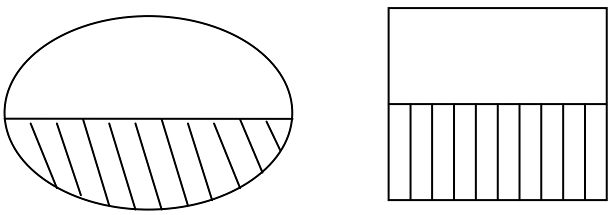
（一）忽略「面積相同」的可能性，直覺從「圖形不同」判斷其一半不同

原案四

評量目標：

對於不同的圖形，能察覺面積相等與不相等的可能性。若是上述相等，期待學生說出「其一半也會相等」。

401 師：請問下面兩個圖形斜線部分的面積一樣大嗎？爲什麼？



402 生：沒有。
403 師：爲什麼沒有？
404 生：因爲一個是橢圓，一個是長方形。
405 師：好，我們先看橢圓，斜線面積是橢圓的多少？
406 生：$\frac{1}{2}$。
407 師：那長方形斜線面積是長方形的多少？
408 生：也是$\frac{1}{2}$。

409 師：這兩個斜線面積都是原來的$\frac{1}{2}$，那怎麼會不一樣？

410 生：一個是橢圓，一個是正方形，他們的面積不一樣。

411 師：好，那這兩題的題目(與原案一做比較)你有沒有發現哪裡不一樣？

412 生：第一題是兩個面積一樣，第二題是兩個面積不一樣。

413 師：題目有沒有說明兩圖形面積相等或不相等嗎？

414 生：沒有。

415 師：如果橢圓面積與長方形面積相等，斜線面積會一樣大嗎？

416 生：會一樣大。

417 師：所以這兩個斜線面積會不一樣大嗎？

418 生：如果這兩個面積（指著橢圓和長方形）一樣的話，斜線面積就會相等；不一樣的話，斜線面積就會不相等。

分析四

從行號 404 研究者發現鍾小澤直覺根據圖形不同判斷斜線面積不一樣大，因此，研究者提問兩斜線面積各佔原面積的多少，他也能夠回答各佔$\frac{1}{2}$（行號 405～408）。於是研究者繼續追問「兩個斜線面積都是原來的$\frac{1}{2}$，那怎麼會不一樣？」（行號 409），他則說明橢圓面積和長方形面積不一樣（行號 410）。因此，研究者研判鍾小澤直覺從兩圖形面積的不同作爲解題的策略，斜線面積都是原面積的$\frac{1}{2}$，卻因圖形不同、面積不一樣，所以他認爲斜線面積不會相等。其實題目中的圖形不一樣，卻沒有說整體面積不等，如同多數人一樣，鍾小澤也忽略了面積相等的可能性。

於是研究者介入，引導他發現原案四與原案一的差異（行號 411），再根據他的回答，反問「題目有沒有說明兩圖形面積相等或不相等嗎？」（行號 413），讓他發現題目並未註明兩個圖形面積相同或不同。當研究者假設「橢圓與長方形面積相等」的同時（行號 415），他能說出斜線面積相等（行號 416）。接下來，研究者提問「這兩個斜線面積會不一樣大嗎？」（行號 417）讓他重新思考，最後能說明判定斜線面積是否相等的關鍵因素是在於橢圓與長方形的面積是否會一樣大（行號 418）。

（二）對於甲 × $\frac{1}{2}$＝乙的問題，能判斷兩者的倍數關係

原案五

評量目標：

能瞭解題意所敘述的倍數關係，並據以判斷大小。

501 師：小智的零用錢的$\frac{1}{2}$倍跟小華一樣多，你能猜得出誰的零用錢比較多？為什麼？

502 生：小智，因為小智的錢就是小華的 2 倍，小智的錢是$\frac{1}{2}$的 2 倍，1 大於$\frac{1}{2}$，所以小智的錢比較多（如圖 4-5）。

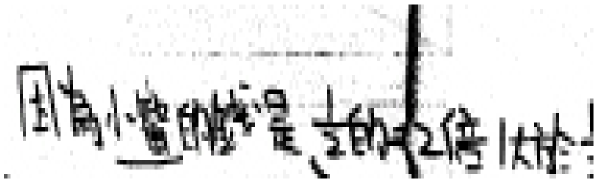


圖 4-5：鍾小澤說明小智的錢為小華（$\frac{1}{2}$）的 2 倍

503 師：小智的錢是$\frac{1}{2}$的 2 倍，是什麼意思？

504 生：因為小智的$\frac{1}{2}$跟小華一樣多，所以小智全部就有$\frac{1}{2}$的 2 倍，也就是 1。

505 師：那小華呢？

506 生：小華只有小智的一半，所以 1 大於$\frac{1}{2}$。

507 師：你能不能舉例說明？

508 生：如果小智有 100 元，小智的一半就是 50 元，小華就有 50 元，所以小智比較多。

分析五

原案五的問題是「甲 × $\frac{1}{2}$＝乙，甲、乙兩數誰比較大？」的類型，研究者從行號 502 發現鍾小澤已說出「小智是小華的兩倍」，之後又說出「小華只有小智的一半」（行號 506）；從行號 508 又可以發現，鍾小澤能舉例「小智有 100 元，小智的一半就是 50 元」，來說明小華只有 50 元，所以小智比較多。因此研究者

判斷他已理解小智與小華的零用錢的大小關係，也能夠針對單位量賦予大小以解釋題意的倍數關係。

（三）忽略單位量不同的可能性，直接以分數大小作比較

原案六

評量目標：

能依據兩個單位量的大小關係作爲解題的策略

601 師：小英拿她自己零用錢的$\frac{1}{4}$去買糖果，小明拿他自己零用錢的$\frac{1}{2}$去買糖果，小英花的錢可不可能比小明多？請說明你的理由。

602 生：小明比較多。

603 師：爲什麼？

604 生：因爲$\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$，所以小明花的錢比較多。

605 師：請問小明花多少錢？

606 生：零用錢的$\frac{1}{2}$。

607 師：那小英呢？

608 生：零用錢的$\frac{1}{4}$。

609 師：他們的零用錢有一樣多嗎？

610 生：不知道。

611 師：小英的零用錢有沒有可能比小明多？你能舉例嗎？

612 生：可能，如果小英有零用錢 200 元，小明有零用錢 100 元。

613 師：那誰花的錢比較多？

614 生：一樣多，都是花 50 元。

615 師：那是一樣多，那小英可不可能花的錢比小明還多？

616 生：如果小英有零用錢 300 元，小明有零用錢 100 元，小英花 75 元，小明花 50 元，小英比較多。

617 師：所以小明花的錢一定比較多嗎？

618 生：不一定，要看小英和小明的零用錢有多少才知道。

分析六

一開始鍾小澤受到等分大小（$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$）的影響判斷錯誤，亦即忽略了單位量是兩個未知的零用錢，而採取比較兩者大小做決定（行號 604），導致解題錯誤。在鍾小澤不知零用錢為多少的情況下，研究者反問「小英的零用錢有沒有可能比小明多？」（行號 611），讓他舉例，製造與他的初始答案有認知衝突的機會，幫助他發現「小英花的錢跟小明一樣多」（行號 614）；然後再次提問讓鍾小澤舉例（行號 615），他增加小英的零用錢後發現「小英花的錢比小明多」（行號 616），最後理解需視兩者零用錢的多寡才能做比較（行號 618）。

伍、討論

根據上述研究結果分析，研究者針對鍾小澤在明確單位量與暗隱單位量的解題表現上，作了下列四點的討論，說明如下：

一、對於較具體的單位量，能直覺指認單位量是否相等作為解題的依據

根據研究結果發現，以原案一與原案四的分析為例，研究者認為，對於較具體的單位量，如圖形面積，鍾小澤能直覺從圖形與面積指認出單位量作為解題的依據。在原案一中，鍾小澤能說出「整體相等其一半會相等」；而在原案四的情境當中，他直覺圖形不同，說明「面積不相等其一半也不相等」。在暗隱單位量的情境，也可以說是單位量模糊的情境下，他無法去探討「圖形不同，面積有可能會相同」，否定了兩個面積（單位量）相等的情況。

二、容易忽略較抽象的單位量，認知平衡後能察覺單位量必須相同

以原案二與原案三爲例，原案二當中的單位量「小智的零用錢」，顯得較爲抽象，而鍾小澤或許是受到題意的影響，而使用約定成俗的方式，通分比較兩者大小，說明小花帽要花掉$\frac{4}{12}$的零用錢，圍巾要花掉$\frac{3}{12}$的零用錢，能說出禮物所要花的零用錢；研究者請他試試其他方法時，雖又能說出$\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$，卻無法以「零用錢等分成 3 份中的 1 份，會比等分成 4 份中的 1 份還多」來做完整的論述。

而在原案三當中，爲了作圖上的方便與準確，鍾小澤用尺幫助畫圖，雖能正確畫出$\frac{1}{4}$與$\frac{1}{5}$，卻畫成了兩條不同線段的$\frac{1}{4}$與$\frac{1}{5}$，忽略了單位量爲固定等長的一條線。經研究者提供鍾小澤認知衝突的情境之後，他能夠察覺兩線段必須等長，才能作等份分割，並比較分割後的兩線段；最後，研究者再次佈題，也能夠完成解題的工作。

三、經研究者提示，鍾小澤能實際假設數據說明兩者之間的大小關係

原案五是「甲 $\times\ \frac{1}{2}=$乙，請問甲、乙兩數誰比較大？」的類型，研究者試著讓鍾小澤舉例，以說明兩者之間的大小關係。他也能解釋「小智的錢是小華的 2 倍」與「小華的錢只有小智的一半」。

朱建正（1997）的研究強調：「甲 $\times\ \frac{1}{2}=$乙 $\times\ \frac{1}{4}$，請問甲、乙兩數誰比較大？」的問題類型對高年級學生是蠻難的，學生往往會認爲$\frac{1}{2}$大於$\frac{1}{4}$，而回答「甲大於乙」；而原案六的問題又比朱建正（1997）所述的問題更難，原案六的題目在楊壬孝（1989）的研究當中，是分數概念五個水準中最難的一種。

在原案六的題意中，小英和小明的零用錢並不一定相等，所以不能僅依$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{2}$斷定誰花的錢多，鍾小澤一開始就以「$\frac{1}{2}$大於$\frac{1}{4}$」所以「小英不會大於小明」的錯誤解題。經由研究者請鍾小澤舉例說明是否有「小英大於小明」的例子。他

能夠舉例並說明，但是並不足以代表他能完全掌握兩者之間的大小關係。

四、主動探討兩未知單位量之間的大小關係，對學生而言是困難的

以原案二與原案六爲例，單位量皆較爲抽象，尤其是原案六，兩個未知的單位量，兩者之間充滿了許多的大小關係，也間接影響了解題的成功與否。在這兩個原案當中，鍾小澤視「單位量相等」爲理所當然，忽略單位量指認的重要性，受題意的影響，直接採取比較大小作爲解題的策略，結果顯示，單位量指認的確影響了解題的成敗。因此，研究者要求鍾小澤試圖舉例，幫助他發現其他結果的可能性；他也舉出不同的例子，並呈現了不同於初始解題的結果。

而原案四與原案六相同，皆需加以探討兩未知單位量之間的大小關係，才能完成解題的工作。鍾小澤在這兩個原案當中，都忽略了探討不同單位量的大小關係，造成解題的失敗。對於大多數的學生而言，在解題的過程當中，要能夠擁有這樣的敏銳度，的確是困難了點。

陸、結論與建議

爲了回應研究問題，本文將重要的發現呈現在「結論」當中；而研究者將訪談過程中所得到的啓示，呈現在「建議」中，說明如下：

一、結論

根據研究的結果與討論，鍾小澤根據問題性質的不同，有不同的解題表現；研究者就研究結果與討論的重要發現，以明確單位量、暗隱單位量與總結三部分來做結論，說明如下：

（一）明確單位量－無法維持「單位量的等長性」

在原案三當中，鍾小澤使用了不同的單位量作分割，即「4 公分的 1 公分」代表$\frac{1}{4}$，「5 公分的 1 公分」代表$\frac{1}{5}$，忽略了題目的單位量爲固定等長的「一條

線」，即將單位量視爲不等長的兩線段，於是在線段的分割上造成$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$的情況。雖然他了解$\frac{1}{4}$與$\frac{1}{5}$的意義，並了解$\frac{1}{4}>\frac{1}{5}$，也許是爲了畫圖上的精準性與方便性，而忽略了兩條線段要一樣長。經研究者製造認知衝突的情境之後，研究者再次佈題，他也能夠成功的完成解題的動作。

鍾小澤有這樣的解題表現研究者並不訝異，因爲學生在解類似的問題當中，往往未能給單位量「1」維持固定的量，造成了兩個「1」不等長的情況，此一迷思也呼應了劉祥通（2001）的研究發現。「$\frac{1}{4}$」對有些學生來說是「1 份與 4 份的並置類型（juxtaposed pattern）」，這些學生可能尚未達到「單位分數」的概念，只是「起始單位分數」的階段而已（甯自強，1997）。

（二）暗隱單位量－忽略單位量的大小關係

在暗隱單位量的情境下，鍾小澤直覺依據兩圖形不同，面積不同，來判斷其一半也不同。忽略了探討「圖形不同，面積有可能會相同」的情境，因而提早否定了兩個整體面積相同的可能。研究者藉由原案一與原案四的比較，作爲檢驗他指認單位量的能力，再配合研究者以反問的方式，讓他瞭解圖形不同（單位量未知），並非面積就不相等，也就是需視情況加以討論作爲判斷斜線面積大小的依據。

在兩個未知單位量的情境下，如原案六，鍾小澤忽略了兩個未知單位量的大小關係，根據題意的敘述，直接做兩個分數大小的比較，而認爲小英花的錢不會比小明多。經研究者要求鍾小澤舉例後，也能夠實際假設數據說明其他結果的可能性。這研究結果和 Hart（1981）與楊壬孝（1989）的研究結果相符合，學生往往忽略了「單位量」的大小，只藉由題意所敘述的數字做大小的判斷，導致解題失敗。

（三）總結

由以上論述可以發現，鍾小澤在解題的過程當中，雖然能指認較具體、視覺化的圖形面積爲單位量作爲解題的依據，但是當單位量抽象不明確時，則缺乏探討「兩未知單位量之間的大小關係」的能力，容易忽略「單位量指認」的重要性，直接根據題意進行解題的動作，因而造成解題上的失敗。由此可知，單位量指認在分數解題的過程當中仍然佔有相當重要的地位。因此，研究者認爲，在解分數單位量等分割問題的表現上，鍾小澤不具有單位量指認的能力。

二、建議

研究結果發現，單位量在解單位量等分割問題的過程當中，扮演著相當重要的角色；透過訪談，發現利用提問能充分瞭解學生的真正想法；運用認知衝突的技巧，亦能夠幫助學生瞭解數學的概念。研究者針對單位量及提問部分作教學上的建議，分別敘述如下：

（一）培養學生理解題意，以察覺問題中所指涉的單位量的重要性

呂玉琴（1994）強調：「無論處理任何分數相關的問題，最重要的一件事就是確認單位量」，單位量的明確性確實是影響解題成功與否的重要因素之一。尤其當暗隱單位量時，單位量未必相等，解題時，需視單位量大小關係作討論，區隔出各種不同的可能性。這件事對學生而言，是很困難的任務。單位量概念是分數概念中的一個極重要的子概念，因此，在教學時，應該先要求學生指認出單位量，待指認出單位量的大小後，相信更能有效幫助解題。

（二）透過提問可拓展學生概念，建議教學者多學習提問技巧

學生對於例行性的問題往往過於熟悉運算，因此可以很輕易的完成解題；而非例行性的問題卻往往成了學生的痛，不知從何下筆以致於將題目所給的數字拿來隨便作運算的動作甚至放棄解題。以本研究爲例，鍾小澤會直接比較兩個分數的大小作爲解題的策略，當暗隱單位量時，則解題錯誤。假若單位量相等，即使

解題正確，也無法研判鍾小澤是否真正瞭解也能掌握此一概念，或者只是過於熟悉練習，依樣畫葫蘆罷了。

此時教師的角色就非常重要，透過提問，運用複述、回應、追問與挑戰等技巧（Resnick, 1995），可以探索學生對題意的理解，也可以使問題聚焦，又可以檢驗學生的概念是否周全（Mason, 2000）。透過互動的過程，掌握、澄清與拓展學生的概念，以幫助學生學習。

（三）認知衝突給學生澄清錯誤概念，建議教學者學習製造認知衝突的情境

引發學生「認知衝突」最有效的途徑即是丟出具挑戰性的問題，促發其思考，在數學教學上這即是教師提問的重要任務。以本研究為例，當鍾小澤在不等長的數線上畫出$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$的同時，研究者反問鍾小澤$\frac{1}{4}$與$\frac{1}{5}$的大小關係，製造認知衝突的情境，幫助鍾小澤有反思的機會，澄清錯誤的概念。

透過層層的追問製造認知衝突的機會，可以誘發兒童的認知衝突情境、釐清學生的概念，進而幫助學生透徹的理解概念（陳淑娟、劉祥通，2001）。對於學生容易產生的迷思概念，倘若教師能藉由提問的機會，提供認知衝突的情境，讓學生進行思考與反思的動作，產生認知失衡，進而尋求認知的平衡。幫助學生促進認知的發展，加強概念的理解，以激發更高層的思考活動，最後達到建立數學知識的目的。

參考文獻

朱建正（1997）：**國小數學課程的數學理論基礎**。國科會成果報告（未出版）。

呂玉琴（1994）：**國小教師分數教學之相關知識研究**。台北：國立台灣師範大學科學教育研究所博士論文（未出版）。

呂玉琴（1996）：國小教師的分數知識。**台北師院學報, 9**, 427-460。

陳淑娟和劉祥通（2001）：國小教師進行數學討論活動困難之探討。**教育研究資訊雙月刊,9(2)**, 125-146。

甯自強（1993）：分數的啓蒙－量的子分割活動的引入。**教師之友，34(3)**, 45-51。

甯自強（1997）：量的子分割（二）~真分數的引入~**教師之友, 38(4)**, 33-39。

甯自強（1998）：涂景翰的數概念。**科學教育學刊，6(3)**, 255-269。

黃瑞琴（1991）：**質的研究教育方法**。台北：心理出版社。

楊壬孝（1989）：**國中小學生分數概念的發展**。國科會專題研究計畫成果報告。

劉秋木（1996）：**國小數學科教材教法**。台北：五南。

劉祥通（2001）：**實踐數學寫作活動以發展國小教師之佈題能力**。台北：文京圖書公司。

劉祥通（2004）：**分數與比例問題題分析－從數學提問教學的觀點**。台北：師大書苑。

Figueras, O.（1989）. *Two Different Views of Fractions: Fractionating and Operating.* The 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.

Guba, E. G. & Lincoln, Y. S.（1981）. *Effective evaluation：Improving the usefulness of* *evaluation results through responsive and naturalistic approaches.* San Francisco：Jossey-Bass.

Hart, K. M.（1981）. Fractions. In K. M. Hart, D. Kerslake, M. L. Brown, G. Ruddock, D. E. Kuchemann & M. McCartney(Eds.). *Children understanding of mathematics* : *11-16*. Oxford London/Northampton.

Lamon, S. J.（1999）. *Teaching fractions and rations for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, New Jersey：Lawrence Erlbaum Associates, Pumlushers.

Mack, N. K.（1990）. Learning fractions with understanding：Building on information knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16-32.

Mason, J.（2000）. Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology, 31*(1), 97-111.

Resnick, B.L.(1995). *Inventing Arithmetic: Making Children' s intuition work in school .* In C. A. Nelson（Ed.）,Basic and applied perspectives on learning, cognition, and developmemt（pp.75-101）.Mahwah, NJ：Erlbaum.

Saenz-Ludlow, A.（1994）. Michael' s fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 50-85.

Saenz-Ludlow, A.（1995）. Ann' s fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 101-132.

A Fifth Grader's Performance on Solving the Unit Partition of Fraction Problems.

Chi-Hsien Hung　Shiang-tung Liu
The Graduate Institute of Math Education,
National Chiayi University

Abstract

The purpose of this study was to explore a fifth grader's performance of solving the unit partition of fraction problems. The study was a case study. The semi-structured interview technique was conducted in the process of data collection. The unit partition problems were divided into the explicit unit type and the implicit unit type. Each type had three problems.

The major findings of this study were as follows. In general, he had better performance on the problems of the explicit unit type than those of the implicit unit type. However, he did not keep the same length of a unit, while he represented different unit fractions, such as 1/4 and 1/5, of the same unit on the number line. In addition, because he ignored the possible difference between two units, he then directly arranged their largeness by the size of two multipliers and could not solve it correctly. Furthermore, he could solve only an item of three problems of the implicit unit type.

Key words：unit, partition, fraction, problem solving