

從數學教學中再探「精熟學習」：嘗試建立融合性的教學原則

陳彥廷¹ 柳賢²

¹中華醫事學院幼兒保育系

²國立高雄師範大學數學系

(投稿日期：92年12月8日；修正日期：93年1月14日、2月17日；接受日期：93年2月19日)

摘 要

過去，由於受到傳統行為學派聯結論（associationism）觀點的影響，許多心理學家與教育學家強調：「練習」可以增進學習的精進。然而，以數學教學課程為例，這些練習卻都是一些相類似甚至重複的計算，只是數字上有一些改變而已。因此，似乎只能說明這只是機械式的串連。時至今日，生物科技、基因工程的進步改變了我們對於生命的定義及對生存的看法。對於「練習」亦有不同的詮釋。有鑑於此，在當前強調理解、有意義學習與能力發展的觀點下，為了使「精熟學習」能重新在現今學習理論中定位，本文首先回顧傳統學習論中有關「精熟學習」的觀點；其次，再從認知分子生物學的觀點探究「精熟學習」；接著，從現今認知學習之觀點探究「數學學習」的意義；最後，進而嘗試建立適合現今教學之原則，以作為日後改善教學之參考。

關鍵詞：精熟學習、聯結論、練習

壹、前言

在教育研究中，思考如何設計一個好的教學模式或有效的教學策略，一直是範疇中所有學者所關心的議題。但是，在探究開發教學模式或研擬教學策略前，必須瞭解學習的主體乃是學生。否則，便陷入邏輯實證論對於科學主體認知錯誤的困境（簡聿成，民90）。因此，若要發展有效的教學策略，便得對於學習者的學習特性、心理特質有所認識。

過去，由於受到傳統行為學派聯結論（associationism）觀點的影響，許多心理學家與教育學家強調：「練習」可以增進學習的精進。然而，以數學教學課程為例，此些練習卻都是一些相類似甚至重複的計算，只是數字上有一些改變而已（邱文彬，2001）。因此，似乎只能說明這只是機械式的串連。自從認知心理學在60年代開始蓬勃發展之後，許多認知學習的發展理論便大量出現（Bandura, 1986; Brown, Collins, & Duguid, 1989; Bruner, 1960; Case, 1978; Klahr & Wallace, 1976; Piaget, 1973; Siegler, 1976; Sternberg, 1989; Vygotsky, 1962；轉引自邱文彬，2001）。然而時至今日，可說是生物科技的世紀，基因工程的進步亦改變了我們對於生命的定義及對生存的看法（洪蘭，2001）。對於「練習」亦有不同的詮釋。有鑑於此，在當前強調理解、有意義學習與能力發展的觀點下，「精熟學習」是否應該就此走入歷史的洪流之中，而被貼上「沒有價值」的學習方式？為了替「精熟學習」能重新在現今學習理論中定位，本文首先回顧傳統學習論中有關「精熟學習」的觀點；其次，再從認知分子生物學的觀點探究「精熟學習」；接著，從現今認知學習之觀點探究「數學學習」的意義；最後，進而嘗試建立適合現今教學之原則，以作為日後改善教學之參考。

貳、傳統學習論中「精熟學習」的觀點

有許多的學習者都花費了許多的時間與努力在「精熟」教材與學習內容上。這種藉由「練習」而促使學習者「精熟」學習內容的觀點，主要源於心理學中聯結論（associationism）的觀點。因此，研究者將先回顧心理學中聯結論有關「精熟學習」的想法與觀點。

一、Thorndike 的學習理論

Thorndike（1913，引自張春興，1994）所提出的系統學習理論中，與「精熟學習」有關的可以簡單歸納成以下三點（轉引自張春興，1994）：

（一）學習是個體在刺激情境中表現反應時所產生的刺激--反應連結。個體所學到的就是一連串刺激--反應連結。每個刺激--反應連結，都是經由先是錯誤反應多正確反應少，而後逐漸正確反應多錯誤反應少，最後達到全為正確而無有錯誤的地步。經由此種歷程的學習方式，稱為試誤學習（trial-and-error learning）。

（二）在試誤學習歷程中，影響刺激與反應間關係能否建立者，主要有三大法則：

1. 練習律（law of exercise）

指刺激與反應間之聯結，隨練習次數的多寡而分強弱。

2.準備律 (law of readiness)

指刺激與反應之聯結，隨個體的身心準備狀態而異；個體在準備反應（如需求）狀態下任其反應時，將因反應而獲滿足，有過滿足的經驗，以後在同樣情境下自會出現同樣反應。

3.效果律 (law of effect)

指刺激與反應之聯結，因反應之後是否獲得滿足的效果而定。對預先設定的刺激表現反應，反應後獲得獎賞（reward），將使刺激—反應聯結增強。對錯誤的反應施予懲罰（punishment），將使包括錯誤反應的刺激—反應聯結因而減弱。

就以上理論而言，其中與數學教學最有密切相關的即為「效果律」，這也是後來行為學派中「增強原則」的前身（邱文彬，2001）。因此，Thorndike（1922）認為：教師的任務就是發現算術中的組成連結，一旦良好組織的組成連結勾勒出來後，「練習」的增強效果就可以在「效果律」的運作下促使連結變強，並且具體的表現在算術的運算上面。

Brownell（1928）針對 Thorndike 的聯結論提出批判。Brownell（1928）反對「效果律」觀點將任何複雜問題都化約為一連串的連結。他認為 Thorndike 的「練習律」扭曲了學習的目標。以數學算術為例：數學學習的目標主要是促進學生從事思考能力的提昇，而非只是能對一系列數學問題作出正確的答案。由此可見，數學學習的目標應是有意義的瞭解，而非「自動化」的反應。單純的「練習」顯然無法發展意義，重複的操作並不能夠促進學習者的瞭解（Brownell,1935）。因此，Brownell（1928）認為：「練習」必須是一種「有意義的習慣化」，而非僅是單純的「重覆」（repetition）動作。以他的觀點言之，Brownell 所強調的是「瞭解」的活動，所重視的是相互統整的原則（principles）與組型（patterns），而不是如聯結論所述連結的集合（collection）（邱文彬，2001）。

二、Skinner 的強化原則與 Bloom 的精熟學習理論

Skinner（1968，引自張春興，1994）的操作條件作用學習理論之建立，雖受到 Thorndike 理論中效果律概念的影響，但在解釋決定個體操作性反應的因素時，Skinner 則採用「強化」（reinforce）取代「獎賞」（reward）的意義。他賦予「強化」一詞客觀的操作性定義---即在條件作用中，凡能使個體操作性反應的頻率增加的一切安排。當個體反應後在情境中出現任何刺激，其出現有助於該反應頻率增加者，即為正強化物（positive reinforcer）；反之，當個體反應後在情境中已有刺激的消失，其消失有助於該反應頻率增加者，即為負強化物（negative reinforcer）。就此理論而言，若學習者在學習某新概念與技能時，若能在其符合學習目標之行爲出現時即刻給予「強化」，在經由一次一次的「練習」即可精練此概念與技能。

正當 Skinner 的操作條件作用廣泛運用於廿世紀六〇年代之際，Bloom（1968，引自張春興，1994）乃提出「精熟學習」（mastery learning）教學與學習理論。此一理論與方法的基本構想是---如對所有不同能力學生，提供其各自所需的學習時間，則每個學生

的成就都能達到精熟的地步（轉引自張春興，1994）。然而，Bloom 精熟學習理論的基礎是源於心理學家 Carroll（1963，引自張春興，1994）所提出---在傳統上，總以為學生在校求學成就的高低，決定於學生自己的性向（如學習能力、智力等），然而，Carroll 認為：學生的性向只是反應在學習速度上的指數；每個學生都有學習能力，所不同者只是學習所需時間多寡而已。如將學生性向視為學習速度的指數，對全體學生學習同樣教材的結果而言，就沒有所謂成就優劣之分，而只有學習快慢之別。傳統教學方式下之所以有些學生成就落後，主要是教師對不同學習速度的學生，花同樣的時間教同樣教材的緣故。如果讓不同的學生都有充分時間從事學習，就可能使每個學生都能學好他的課業（轉引自張春興，1994）。

Bloom 參照 Carroll 的構想，也根據 Skinner 操作條件作用學習中連續漸進法的原理，進一步提出精熟學習理論，並發展出教與學策略（teaching-learning strategy）（轉引自張春興，1994）：

- （一）將教材區分為多個小單元，每一（或二）週教完一個單元，並舉行測試。
- （二）針對教學目標，使每次測試的題目，不要太難；使所有學生都能達到 80~90% 正確無誤的精熟地步。
- （三）每次測試後，都讓學生核對成就。學生成就達不到精熟地步者，即給予額外時間補習（個人或團體方式）。補習之後再行測試，直到精熟地步，才進行下一單元學習。
- （四）學生中學習較快者，在等待時間施予充實教學，以擴大或提升其知識的範圍或學習能力。
- （五）在學期結束舉行期末考試時，試題包括全學期學過而且也學會的多個小單元。因而在成就上預期會有 80% 的學生考到甲等。

就此理論而言，學生利用額外時間補習即可視為再次的「練習」。經過反覆的練習之後，即可熟悉所需學習的教材內容與概念或技能。Guskey（1985）& Slavin（1987，引自張春興，民 83）的研究結果顯示：（1）在中小學教學上，短期實施較長期有效。原因是素以團體教學為主的中小學階段，很難長期配合不同學生所需要的不同學習時間。

（2）由於精熟教學可幫助學生克服學習困難，增加成就感，故而經由此種訓練的學生，在求學態度上較為積極（轉引自張春興，民 83）。

綜合上述之理論與觀點可以發現：聯結論中對於練習的觀點似乎只重視外顯行為的反應，卻忽略了有意義的學習。研究者認為，這或許是行為派典為後期學者所存疑之處。然而，是否就此便能對於聯結論之觀點全盤否定？抑是針對上述不足之處加以補強，仍能使此論述更為光亮？以下，研究者希望能藉由近來頗為流行之認知分子生物學觀點，為聯結論之「精熟學習」加以佐證，期能肯定其價值。

參、認知分子生物學的觀點

洪蘭（2001）指出：正當認知心理學家在一九六〇年代革命的時候，生物學界也發生了一場革命，使生物學與心理學的興趣更相近了。這個革命有兩個主要部件：一個是分子的部件；一個是系統的部件。而所謂的分，即是指神經傳導過程中的最小單位---神經細胞（神經元）。分子的部件的研究源自十九世紀末、二十世紀初期孟德爾（Gregor Mendel）、貝遜（William Bateson）和摩根（Thomas Hunt Morgan）對遺傳基因的探討。研究結果發現：某一些相同的 DNA 登錄著某些具有特質可辨認的蛋白質的碼。藉此，我們可以知道細胞功能的藍圖---尤其是細胞間彼此如何傳遞信號---此即提供了解生命歷程一個普遍的概念架構。這個架構已經在研究簡單的無脊椎動物如海蝸牛（Aplysia）和果蠅（Drosophila）上有重大的影響，當時機成熟時，這個架構會使科學家去研究哺乳類動物中複雜認知歷程分子層次的內在表徵。而系統的部件主特要是將認知功能對應到大腦的特定區域。這些新的發展使我們可以研究當一個人知覺到感覺刺激、開始去做一個動作、去學習和記憶時，大腦發生了什麼事。

本段，研究者將以分子部件的觀點出發，首先探討在學習的過程中神經細胞所扮演的角色，其次再針對「精熟學習」在此範疇中的地位加以論述。

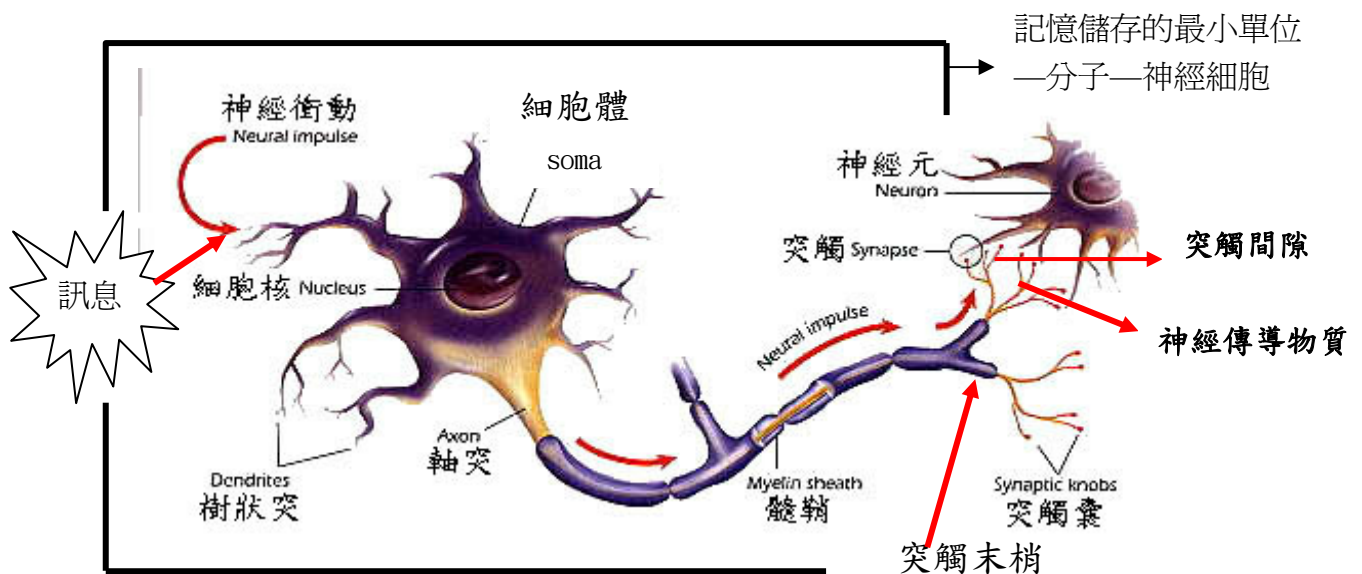
一、學習過程中細胞的角色

近代生物學在記憶上最大的發現，即兩個（神經）細胞之間的連接是記憶儲存的基本單位。西班牙神經解剖學家卡哈（Santiago Ramo'n Cajal，引自李茂興、陳夢怡，2000）提出「神經教條」，即大腦是由許多細胞組成的，叫作神經細胞或神經元(nuron)。神經細胞種類有三：

1. 感覺神經元 (sensory neuron)：將衝動 (impulses) 傳向中樞神經。
2. 運動神經元 (motor neuron)：將中央神經系統傳來的衝動傳向肌肉或受器。
3. 聯結神經元 (inter neurons)：僅存在於脊髓和腦中。負責連結感覺神經元和運動神經元。

然而，神經細胞（神經元）的構造可區分為四個明顯的部分（見下圖一）：

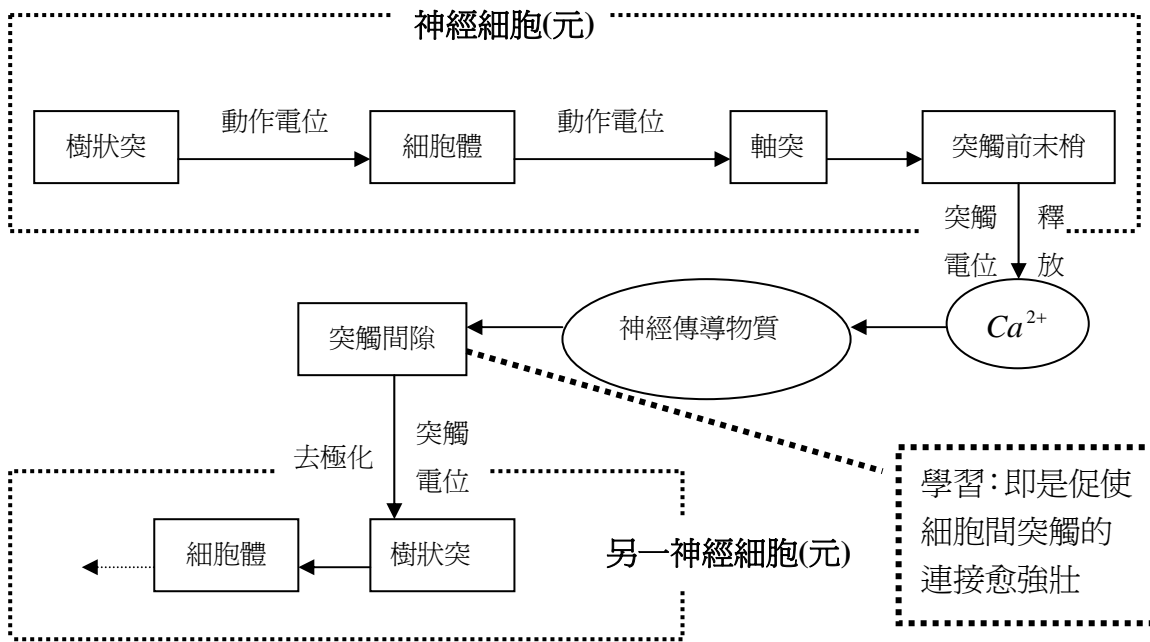
1. 細胞體 (soma)：包含細胞核，為細胞新代謝的中心。
2. 樹狀突 (dendrites)：主要的訊息接收器。單一神經元擁有數千個樹突。
3. 軸突 (axon)：細胞傳遞訊息的工具。是神經元對外輸出的路徑。
4. 突觸末梢 (axon termination)：與別的細胞特定的感受表面相接觸，其所釋放出來的化學物質對訊息的傳達扮演著重要的角色。(轉引自李茂興、陳夢怡，民 89)



圖一 神經細胞（神經元） axon termination

卡哈（引自洪蘭，2001）認為：神經細胞（神經元）是大腦訊號的基本單位。卡哈亦指出：不同動物的不同學習能力，不是與牠們大腦中有哪些種類（type）的神經細胞（神經元）有關，而係與神經元的數量與神經元之間的連接有關。大腦的神經元數目越多，其彼此連接的形態越複雜，這個動物學習不同種類的的能力也越強。易言之，不同動物的神經細胞事實上是相同的，但是，由於其學習的次數愈多則會促使神經細胞（神經元）間突觸與樹狀突的連接愈緊密，而使得記憶愈穩固。同時，卡哈亦認為：學習不可能造成新的細胞成長，學習可能使現行已存的細胞之間連接更強壯，使其間的溝通更有效，為了儲存長期記憶，神經細胞之間可能長出新的分支，形成新的、更強壯的連接。當記憶衰退時，神經細胞失去了它的分支，所以它們之間的連接就變弱了（轉引自洪蘭，2001）。由此可見：在學習的歷程中，神經細胞（神經元—分子）即是扮演記憶的功能；當學習發生時，便會促進神經細胞間突觸與樹狀突的連接愈強壯—亦即增進記憶的形成，相對的，若是神經細胞間突觸與樹狀突的連接減弱，則象徵著記憶的流失。

卡哈進而發現：神經元是動態的在放電，所以訊息可以在細胞膜內從樹狀突和細胞體接受訊息，傳到軸突，再至突觸前末梢。隨後，在1920~1950年間，科學家發現神經元不是只用一個訊號，而是兩個---動作電位（action potential）與突觸電位（synaptic potential）。動作電位是一個電流訊號，從神經細胞的細胞體和樹狀突沿著軸突流動到突觸前末梢。突觸電位則是將訊息從一個神經細胞傳到另一個。當動作電位電流傳至突觸前末梢時，其電流無法跳過突觸間隙去激發突觸後目標細胞（即另一個神經細胞），因此，此（動作電位）電流會使得末梢釋放出一種神經傳導物質，這個物質流入細胞間隙中成為對目標細胞的信號。以下，研究者將訊息在神經細胞傳導之過程繪製如圖（圖二）所示。



圖二 神經細胞（神經元）間訊息傳遞流程圖

2000年諾貝爾生物醫學獎得主即是鑽研神經分子生物學的研究。其中任職於美國Columbia University的神經生物學及行為學研究中心的Kandel便曾揭露許多引導人類思考的隱藏過程。他的發現包括有關長期與短期記憶的獲得之分子機制（註：認知分子生物學領域即是從神經分子生物學的範疇中聚焦於認知歷程的部分）。七〇年中，他的研究群發現神經傳導物質（neurotransmitter）---血清素（serotonin）在記憶過程中的重要性。他們的研究顯示血清素會引發一連串的化學反應來增強在腦神經元間達好幾分鐘電的聯繫（electrical connection）。這是短期記憶的基礎反應。後來，Kandel也發現了在短期轉長期記憶過程中顯得活躍的基因。再者，突觸與樹狀突間因練習次數的增加，而使得學習者形成了短期記憶，此記憶會隨著體內一連串的化學反應而傳輸進入大腦結構中而形成長期記憶，以提供將來的「提取」運用。

二、精熟學習在認知分子生物學的地位

由上述生物學上對細胞的研究，研究者認為：若從細胞分子的角度切入對學習者學習的看法，「學習」---便可視為細胞間成長改變的歷程。經過學習者多次的練習，細胞間的突觸與樹狀突的连接便會隨之改變，慢慢地，記憶便會隨著學習者不斷的練習而加深。因此，卡哈（引自洪蘭，2001）提出「突觸可塑性假說」（synaptic plasticity hypothesis），認為突觸與樹狀突连接的強度---即一個神經細胞能夠興奮（或抑制）其目標細胞動作電位的難易度---不是固定的，而是極有彈性、可以修改的。卡哈特別提出這個突觸與樹狀突连接的強度可以用神經元的活動性來修正，更指出學習用的即這個突觸與樹狀突的可塑性，學習可以造成突觸與樹狀突连接強度長期的改變，因其可引發新的突觸连接的生長，這種結構上長期改變就是記憶的機制。

卡哈於1894年在皇家學院（Royal Society）的講座演講中詳細的說明了這個看法：

「心智的運作會加速大腦有工作部位神經元之間的發展，透過這個方法，各組神經元之間先天已有的連接可以被末梢分支的繁茂所增強……」

卡哈預測：學習歷程會改變造成大腦活動神經訊號的型態和強度，這種活動被改變的結果是神經元可以改變及其別的神經元之溝通能力。這種基本突觸溝通的持續改變---此即突觸的可塑性---提供了記憶儲存的基本機制。易言之，學習者在學習一件新事物時，因新事物的刺激對個體來說是新穎的、新奇的、未曾經歷的，因此會在細胞間產生新突觸的生成。然而，隨著新事物出現次數的增加，細胞間突觸的連接會愈來愈強，因此，學習個體辨識的時間會愈來愈短，也就是愈來愈熟練。後來，卡哈的想法於七十五年後（約 1969 年）才在動物身上看到，這是當習慣化的研究得到突破後才實現的（洪蘭，2001）。

基於此論點，研究者認為：「精熟學習」強調對於所有不同能力學生，提供其各自所需的學習時間，則每個學生的成就都能達到精熟的地步---與卡哈所認定突觸強度可以用神經元的活動性來修正，學習可以造成突觸連接強度長期的改變，因其可引發新的突觸連接的生長，這種結構上長期改變就是記憶的機制之觀點，均重視「練習」的重要性，因此，也更為聯結論「精熟學習」之論述增強了其地位之穩固性。

雖然「練習」固有其重要性，然而不可否認的，以認知學習的觀點言之，學生之學習亦必須對先前所學的概念或技能加以統整與瞭解並賦予意義後才是學習者真正自己的知識，否則，便只是一連串機械式的串連而已。以下，研究者嘗試為數學學習作出一些意義之探討，以為「精熟學習」之不足加以修正與補強。

肆、認知學習觀點對「數學學習」意義之探究：強調理解與溝通

在瞭解以聯結論為基礎的「精熟學習」觀點與認知分子生物學為根基的「學習」看法後，接續，研究者想要探討的是：在時下流行的認知學習觀點中，數學教學與學習的意涵是什麼？「精熟學習」是否可以在當下潮流中存留呢？以下，研究者擬先探討現今數學教學及學習的觀點與想法，才能決定「精熟學習」是否還有存在之必要，以及重新為它的面貌加以釐清。

九年一貫課程實施後，其課程總目標強調的是能力的開拓，是要為國民的終身學習奠下基礎，以因應社會的變遷。這樣的做法，不但使數學課程顧及技術層面外，更重視與其他領域的連結，更強調解決問題，以及與他人溝通講理等各種能力的培養，這些能力就是幫學生發展如何學與樂於學的基礎。因此，研究者認為：現今數學學習的觀點可以分為(1)有意義的學習；(2)重視學習者自行的建構；(3)安排對話溝通的場域等觀點。以下，茲分別加以論述。

一、有意義的學習

在聯結論盛行的年代，如何使數學成為有意義的學習，早已被一些學者所關心與注

意。Brownell (1935, 引自邱文彬, 2001) 便相當反對「機械式的練習」, 他認為這樣的學習方式只會使學習者認為數學是一套缺乏彼此關聯的事實與程序, 而不是一個相互統整的數學結構 (轉引自邱文彬, 2001)。直到 1950~1960 年代認知心理學開始發展, 數學教育學者便開始受到意義化教學的衝擊, 才開始重視如何統整數學知識。現今九年一貫課程強調學生的學習須與生活經驗連結, 能隨時將課室中所學的數學知識運用於日常生活中, 方可稱為有意義的學習。換句話說, 即是培養帶得走的能力。

二、自行建構

這幾年來, 許多教師或社會人士經常提及「建構主義」。然而, 主張建構主義者認為: 孩子並非是空白接受的器皿, 他擁有其既有的認知系統。孩子若想真正理解某一個新的概念, 則必須在心靈內部將此新概念與現有既存的概念相互比較與串連。換言之, 新概念不是僅僅堆積於舊概念之上, 而是與舊概念整合為一個新的概念。以學習 $4+6=10$ 的加法運算為例, 多數孩子在生活中已習得「運用手指頭」的非正式算術, 這是運用「累加」的解題策略, 這種解題策略是孩子的舊有經驗與直觀經驗連結。若在孩子學習的過程中設法將不熟悉的抽象符號運算---「 $4+6=10$ 」與舊有經驗連結, 這樣的學習---「創造理解、意義化的學習」才是有意義的學習方式, 也才能長久存於學習者的記憶中。換言之, 任何抽象化的數學概念學習, 應植基於孩子的經驗才能使孩子「make sense」, 達到意義化的學習。

近來, 建構主義經常地被強調, 乃因它不強調客觀、絕對的傳統經驗主義或理性主義的知識觀。建構主義相關研究者認為學生的學習與其先備知識、另有架構、閱讀理解或數理解題的思考特質有關。吳璧純 (2003) 進行一項國科會的研究發現: 低年級學童日常生活中的科學問題, 從學生的作答中, 可以得到許多有趣的學生知識建構現象。像有一位學生問到: 信丟到郵筒, 怎麼會到我親戚家呢? 曾有一位美國學者, 在他的一本書中也寫道: 在我還是小孩的時候, 曾經認為「by air」所寄的信, 是藉由空氣傳到姑姑家的。由這兩件學習者建構「信如何被送達目的地」的事件中都說明了: 對於外界的訊息, 認知個體是主動在組織與理解的。由此, 亦驗證了學生要達成有意義的理解, 才能真正獲得知識。換言之, 即是學習者自行建構的知識才能深刻烙印在學習者的基模中。

三、對話溝通

在知識的建構理論中, Vygotsky (1978, 引自曾志華、甄曉蘭, 2003) 受到馬克斯歷史唯物論和恩格思辯證方法論的影響, 特別以「社會-文化」(socio-cultural) 的觀點來探討人類認知的發展。他的理論重點有 (轉引自曾志華、甄曉蘭, 2003):

(一) 強調社會文化的重要性

對 Vygotsky 而言, 個體的心理發展是起源於社會的, 並且是受社會文化所影響的。根據 Wertsh (1985) 的解釋: Vygotsky 將人類心理能力發展區分為兩個層次---低層次與高層次。透過原始 (natural) 較低層次的能力, 如基本的注意和感官的知覺, 個體

在人際間的互動與學習使用語言工具的歷程中，便產生思考並造成心靈的變化，亦即個體對於外在世界的重新再建構以及意義化。在個體發展的歷程中，人際間的互動即為社會文化的實際活動，而語言或符號的使用則是人類特有的文化產物。因此，就 Vygotsky 的觀點而言：社會文化可說是人類心智發展的主要動力。

（二）重視語言使用的重要性

依 Vygotsky 的觀點而言，人類之所以有異於動物的高層次心理表現，其最重要的指標就是符號（特別是語言）的使用。他認為語言不但是文化的產物，而且同時也是組織思想的工具，在個體學會使用語言時，其心理功能便產生了徹底的改變，不僅僅學習到了人類社會文化獨特的經驗和知識，而且改變了個體內在的思維方式，使得思想和行動不再受到具體物的羈絆，個體也得以藉著語言符號，自動地重新調整了自己的意識，不但用以解決內在的問題，並且用以作為和他人溝通互動的工具，進而影響他人的意識或控制週遭的環境。因此，隨著個體語言能力和社會經驗不斷的增加，其較高層次的邏輯思考能力也得以不斷地提升。

綜合言之，Vygotsky 從社會文化的層面出發，強調人際間的互動及文化工具（語言或符號）的使用，為個體的知識建構提供了另一方面的重要基礎。由此可見，學習者與外在的人、事、物進行互動，使得個體新的認識總是一方面植基於過去的知識基礎，另一方面也由於能夠持續的與所處環境調整與發展，進而達成學習。

伍、「精熟學習」的重新定位：嘗試建立融合性的教學原則

在陸續瞭解聯結論中「精熟學習」的起源、認知分子生物學中「學習」的機制以及近來數學學習的觀點後，研究者發現：單單只是「精熟學習」的練習觀點是很難再繼續立足而不動搖。其原因有三：第一，學習者單純經由「精熟學習」的練習模式而獲得的能力，可能只是一連串技能的熟稔，並無法保證學習者能透過這樣的方式獲得真正的理解；第二，學習者在無法真正理解學習內容的意義時，便無法確實欣賞數學的結構；第三，由於個體認知發展的限制，學習者若無法與週遭環境、同儕或師長互動的機會，則無法使自己的學習提昇。

因此，欲使「精熟學習」重新屹立於當代認知學習的潮流之中，勢必除了保持聯結論中不斷地練習以符合認知分子生物學中「細胞突觸連結增強」之理論外，還應包括真正認識數學的結構、學習者對於知識的解構與重構以及重視與環境的互動等向度。這樣，才能使學生在學習過程中獲得有意義的知識；如此，方能使「精熟學習」與學習過程相結合，而不只是單一習慣強化的連結而已。以下，研究者根據有意義的數學學習觀以及一些認知學習的趨勢提出一些數學教學的融合性原則，以為「精熟學習」提供教學上的參考。

一、安排「精熟學習」的時程進度表

依照本文前面所述，教師在課室正式實施「精熟學習」前，應遵循連續漸進的原理，將課程安排出有效的教學進度。研究者提出以下步驟供教師教學之參考：

- (一) 分析教材內容的結構，將所要學習的課程依照學習者發展的限制與先備知識 (prior knowledge) 由具體到抽象分為幾個小單元。

以高中生學習「圓錐曲線---橢圓」單元來說，教師首先必須先了解：學生對於「圓」圖形與方程式的運用熟練程度；接著，分析「橢圓」單元中要介紹哪些主要的類型（如長軸平行 x 軸、長軸平行 y 軸、歪斜型）；這些類型具有哪些共通的性質、相異的性質等；最後，決定從實物的操作（ $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ ，即橢圓上任一點到兩焦點距離和唯一定值）讓學生從具體的練習學習到橢圓的性質，進而進入抽象的運用。

- (二) 針對教學目標，設計評量的題目。務求不要太難，使所有學生最後都能達到 80~90% 正確無誤的精熟地步。

同樣的以「橢圓」單元為例，教師必須清楚了解單元的教學目標為何，再根據這些教學目標設計評量的題目，這些題目研究者建議與校內資深的專家教師一起研商，相信會更具有測驗的效度。同時，也必須增加一些與評量題目類似的「平行題目」（註：所謂平行題目是難易度相似、所需之概念相同之題目）提供未達「精熟」程度的學生練習，並安排已達「精熟」程度的同儕與之一同重新練習或由教師重新講解；最後，再以一份試題（可能是操作、運算、簡答...等）檢測其「精熟」程度。

二、考量學生學習前的起點行為和特性

自從 Piaget 的認知發展理論逐漸受到數學教育學者的注意後，學習者認知發展的限制便逐漸受到重視。換言之，「精熟學習」雖強調經過長時間練習能使學習者熟練學習的教材內容，但不可否認的，學習者發展的階段亦是一個相當重要的變因。研究者認為：學習者學習數學時，並非僅是將外在學習的材料加以複製，而是由學習者主動解構學習內容再重新以自己的符號語言建構而成。在這樣的觀點之下，學習者學習前的先備知識與生活經驗便是賴以建構的基礎。倘使教師在教學前並未將學生的先備知識納入考量並考慮學習者認知發展的限制，則在學習歷程中的「精熟學習」步驟與練習便無法使學生對數學概念與架構產生有意義的理解，相對的只是習得「機械式的程序」。以下，研究者針對學習前的起點行為提出觀點：

- (一) 「精熟學習」前須注意學習教材是否符合學生認知發展水準

所謂「認知發展水準」，是指學生學習某一特定的學習內容前，所具備的基礎知識、技術和能力。舉例來說：欲教導學生「函數」概念時，教師應瞭解：函數的表徵方式約可分為文字 (verbal)、文氏圖 (arrow diagram)、代數式 (algebra) 和圖形 (graph) 等四種，然而，任課班級中的學生具備哪些表徵的能力？應從哪種表徵方式著手？這些考量都與學生的認知發展水準有關，應加以慎思選擇。如此，教材的內容才能在符合學生認知水準的狀況下發揮「精熟學習」的功效。

- (二) 「精熟學習」的教材內容應能帶給學生適度的認知衝突

Piaget 認為：學習個體的「調適」乃是隨著環境的變化，有機體自身也發生了變化，

亦即有機體以改變自己的方式來應付變化中的環境（張新仁，2003）。這是去平衡化的動力來源，也是認知結構向上發展的基礎（邱文彬，2001）。因此，教師再安排學生學習的材料內容時，應預先瞭解學生先備知識與生活經驗的另有架構，以便能夠安排引起衝突的課程，以增加學生學習過程中的印象。接著，再配合「精熟學習」的練習，以達成學習目標。

三、「精熟學習」前逐步引導學生對「精熟學習」的認識

長久以來，大多數的學生均在傳統的課室教學中學習數學。為避免學生不習慣或懷疑「精熟學習」的練習程序，教師在正式實施「精熟學習」前應預先實施一段引導學生適應此種學習方式的「引導期」，讓師生間有足夠的時間適應與充分溝通，瞭解「精熟學習」的精神、實施方式以建立共識。

四、研擬「精熟學習」的教學策略

在一切「精熟學習」的前置作業都準備妥善後，接下來，便是將「精熟學習」的學習方式正式引入課室之中。以下，研究者提出一些「精熟學習」的策略：

（一）明白提出「精熟學習」的學習方針

「學習方針」是指教師在教學時給予學生的說明與指示。其中包括清楚陳述學習目標、學習內容、教材的重要性、應該注意的線索、以及教師對學生的期許。一般而言，教師設計完善的教學計畫、安排有秩序的課堂活動、提供學生如何安排學習的建議、提示課堂所涵蓋的重要內容以及指定難易度適中的練習作業等措施，都可使學習方針更加清晰、明確。

（二）重視學生課堂的參與及溝通

章勝傑（1999）指出：孩童與同儕互動時，無可避免的會發生與自己的認知基模相衝突的情況，如果孩童意識到這種認知的衝突便嘗試解決，結果可能是孩童會修正自己的基模，這樣的歷程即是所謂認知的發展。Gergen（1985）強調知識建構的歷程，他認為知識是互為主體性（intersubjective）之社會建構的產物，現實世界是由人們在其所生存的歷史文化情境中，經由社會交換的歷程所建立的，故 Gergen 將此理論稱為「社會建構論」（social constructionism）。知識是人類在協同合作的活動之一，在溝通、協商與衝突等互動歷程中衍生與轉變，因此對世界的論述也常是人類之間互動關係的表達（轉引自吳芝儀，2000）。周立勳（1995）以國小五年級的學生進行為期四週的自然科教學實驗，結果發現團體互動的經驗是影響學生學習表現的關鍵。由此可見，學習社群成員間的互動對於知識的學習有很大的影響力。

有鑑於此，研究者建議教師在課程進行中應儘可能地鼓勵學生參與小組同儕間的討論，對於小組中的領導者或傾聽者都應給予上台發表的機會，如此，便可以藉由個體「練習」的機會調整自己的概念結構，亦可藉由傾聽而修正自己的錯誤。可見，就此社會互動的觀點而言，在學習過程中透過不斷地「練習」可以使學習者心中的概念結構得到回饋性的訊息，並且加以修正、調整，對學習效果有很大的助益。

（三）強調「練習」的觀點以符合認知分子生物學之理論

從認知分子生物學的觀點來說，個體學習的次數愈多會促使神經細胞（神經元）間突觸與樹狀突的连接愈緊密，而使得記憶愈形穩固。卡哈亦強調：學習不可能造成新的細胞成長，學習可能使現行已存的細胞之間连接更強壯，使其間的溝通更有效，爲了儲存長期記憶，神經細胞之間可能長出新的分支，形成新的、更強壯的连接。當記憶衰退時，神經細胞失去了它的分支，所以它們之間的连接就變弱了（轉引自洪蘭，2001）。由此可見：教師在課室中讓學生學習數學概念時，如同前面所述：先讓學習者認識學習概念的結構後，便要展開「練習」。此練習的方式可藉助老師的講述、學習者自己的練習、同儕間相互對話一同解決問題等之形式。藉由「練習」的歷程，促使個體對於數學的概念能夠熟練---此亦即符合認知分子生物學中所強調的---細胞間突觸的生長與記憶的穩固。

（四）適時使用增強與獎賞

以聯結論的觀點來說，最能引發學生學習動機的誘因就是增強與獎賞。例如，教師的讚美與鼓勵對引發學生的學習動機，常有強烈的效果。因此，教師無論如何要讓所有的學生確知其所獲得的讚賞與鼓勵，而不是只限於幾個優等生而已，尤其是在「精熟學習」中的形成性測驗之中，教師應針對學生的努力與學習成功不斷地給予獎賞與鼓勵。

（五）隨時給予回饋與校正活動

回饋和校正活動是「精熟學習」之所以成爲一有效教學的關鍵。最好的回饋應是立即的、清楚的、直接的，以及明確地提供學生改善學習的期望、信心及方法，同時必須在教學過程中定期實施。至於校正活動的內容與實施型態，應針對形成性測驗中的目標性質與個別學生的學習型態來設計。

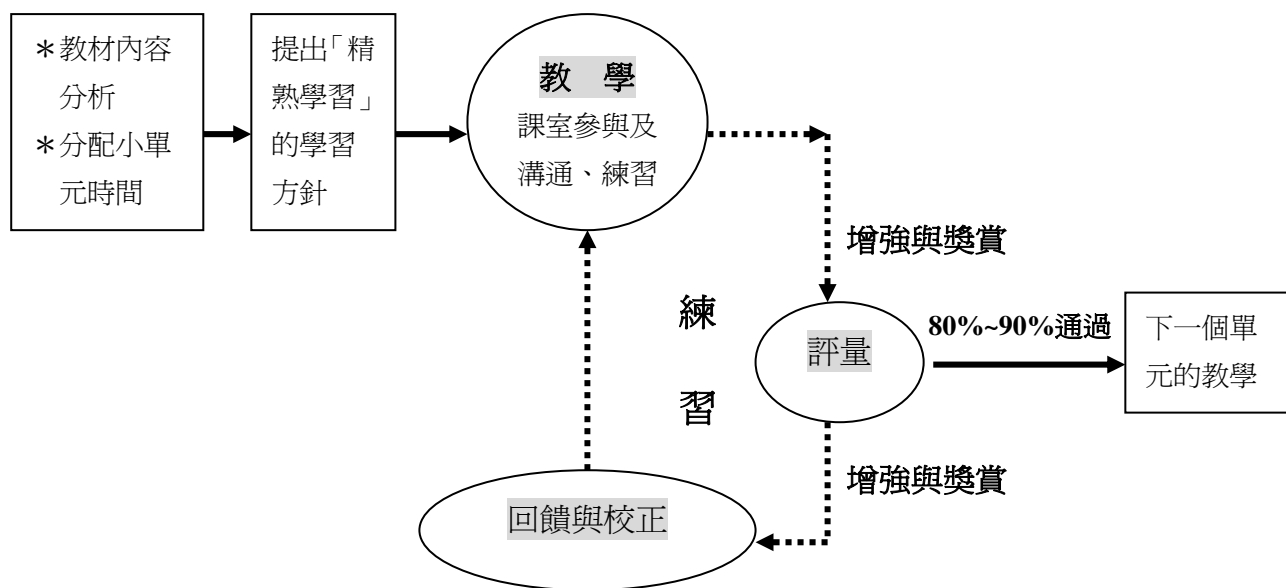
五、設定「精熟學習」評量標準

「精熟學習」中所使用的形成性測驗和總結性測驗都屬「標準參照測驗」。亦即學生成績的評定，不是與其他同學的成績做比較分等地，而是以個別學生實際的表現和事先訂定的絕對性精熟標準做比較而分爲「精熟者」和「未精熟者」兩類，且「精熟者」的人數不限。那麼，該怎樣界定「精熟」與「未精熟」的標準呢？一般來說，「精熟學習」的標準界定在 80% 至 90% 之間，其理由如下：如果精熟學習的標準定在 80% 以下，則學生可能無法充分瞭解該學習的教材內容，以獲得進一步學習的先備能力。然而，如果精熟學習的標準若定在 90% 以上，則測驗卷中題意不清、不適當或無效的試題，可能導致學生需答對這些有瑕疵的題目才能達成，要求學生完全或近乎完全的精熟標準，對學生的學習興趣和態度有不良的影響。因此，研究建議教師在訂定「精熟學習」的標準時，須先對形成性評量與總結性評量加以審核，再針對評量之內容決定「精熟學習」的標準。

六、下一個單元

當全班的學生有 80%~90% 達成「精熟程度」時，即可進入下一個單元再重新實施另一階段的「精熟學習」策略。

以下，研究者將課室中實施「精熟學習」的教學策略與步驟繪製成圖(如圖三所示)，以提供教師教學之參考。



圖三 「精熟學習」教學步驟流程圖

陸、結論（兼論本研究之限制）

整體來說，「精熟學習」所強調的不斷「練習」雖然是聯結論中所重視的，但實不應該因行為主義派典的沒落而完全否定其價值。「精熟學習」若要能在現今「以學生為主體」的建構理念下生存，應在學習的過程中多加修正。換言之，即應視「練習」是學習的過程而非學習的結果。這樣，才能使學習者真正學習到數學的概念與結構，達成真正的瞭解，而不是只有達成數學運算能力的增強與自動化。再者，誠如行動研究法之精神---課室中的教學活動是一面做；一面思考、試驗、改進的方法，其目的乃在將教學上隨時發生的問題加以研究、改善。而此過程即是「知-思-行」，不斷辯證的過程。針對本研究所提之「精熟學習」教學原則，研究者亦是希望教學現場之教師能夠隨時針對自身之教學隨時檢視（從錄影帶、學生之反應）其成效，並進而加以改進---此不斷「反省—思考—改進」之歷程亦是讓教師能「精熟」數學之教學之技巧，達成教師「精熟學習」教學之目的。然而，本研究所提之「精熟學習」之融合性教學原則雖尚未全盤經過實務性操作之淬煉（此乃本研究之受限之處），但乃植基於上述理論之研究結果。研究者希望能盡速從研究現場發現其特色與結果，希冀將來能在提供現場之教師更多有關「精熟學習」之訊息。

參考文獻

- 李茂興、陳夢怡(譯)(2000): **心理學：適應環境的心靈** (原著: Psychology: the adaptive mind)。臺北市: 弘智文化。
- 李善良、單增 (2002): 我們為什麼要學習數學---兼及新世紀中小學數學課程目標。 **數學傳播**, 26, 4, 77-88。
- 邱文彬 (2002): 練習在數學教學的回顧與展望: 嘗試建立綜合性原則。 **科學教育月刊**, 237, 8-21。
- 吳芝儀 (2000): 建構論及其在教育研究上的應用。載於中正大學教育學研究所主編: **質的研究方法** (183-220)。高雄: 麗文。
- 吳璧純 (2003): **建構主義取向的教學——師生交互猜測、相互成長的活動**。
<http://www.socialwork.com.hk/artical/educate/hk3.htm>
- 周立勳 (1995): 小組獎勵對國小兒童分組學習表現的影響。 **嘉義師院學報**, 9, 175-222。
- 洪蘭(譯) (2001): **透視記憶** (原著: Larry R. Squire & Eric R. Kandel)。臺北市: 遠流。
- 章勝傑 (1999): 數學題目難度對合作學習小組同儕互動質與量的影響。 **國立台東師範學院學報**, 10, 75-104。
- 張春興 (1994): **教育心理學---三化取向的理論與實踐**。臺北市: 臺灣東華。
- 張新仁主編 (2003): **學習與教學新趨勢**。臺北市: 心理。
- 國立編譯館主編 (1998): **國民中學數學第三、四冊教師手冊**。台北: 台灣書店。
- 曾志華、甄曉蘭 (2003): **建構教學理念的興起與應用**。 <http://paper.nt1.isst.edu.tw/html>
- 簡聿成 (2001): **認知分子生物學的發展及其對教育研究的啓發**。國立高雄師範大學科學教育研究所高等心理學教材, 未出版。
- Brownell, W. A. (1928) . *The development of children's number ideas in the primary grades*. Chicago, IL: The University of Chicago.
- Brownell, W. A. (1935) . Psychological considerations in the learning and the teaching of arithmetic. *The teaching of arithmetic (The tenth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)*. New York: Teachers College, Columbia University.
- Skinner, B. F. (1968) . *The technology of teaching*. New York: Apple-ton-Centry-Crofts.
- Thorndike, E. L. (1922) . *The Psychology of Arithmetic*. New York: The MacMillan Publishing Company.
- Vygotsky, L.S.(1978) . *Mind in society: The development of higher psychological processes*. In M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman(Eds.), Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wertsh, J.V. (1985) . *Vygotsky and the social formation of mind*. Combridge. MA: Harvard University Press.

To Explore the “Mastery Learning” from Mathematics Teaching :

Try to Establish Teaching Principles

Yen-ting Chen ¹ Shian Leou ²

¹Department of Early Childhood Education,
Chung Hwa College Medical Technology

²Department of Mathematics ,
National Kaohsiung Normal University

Abstract

In the past, affected by the traditional viewpoint of behaviorism’s associationism, many psychologists and educators emphasize that “ practice” may promote learning. However, take mathematics teaching for example, such practices are nothing but similar and repeated counting. Therefore, it shows that “practice” is just machinery practice. Up to now, the advancements in organism science and gene construction engineering have changed our definition of life and our opinions about existence. In the same way, “practice” is also given a different explanation. Based on what is referred above, and the trend that “comprehension”, “meaningful learning” and “ability of development” are emphasized more and more, this article will look back on the traditional learning theory about “mastery learning” first. Second, to explore “mastery learning” from the viewpoint of molecular biology. Third, to explore the meaning of “mathematic learning”. Finally, to establish teaching principles, to provide teacher’s consult.

Key words: Mastery learning, Associationism, Practice