兒童對數學比例問題的建構

魏宗明 [1]　　劉祥通 [2]

[1]朝陽科技大學幼兒保育系
[2]國立嘉義大學數學教育研究所

(投稿日期：92年2月20日；修正日期：92年3月24日、5月1日、22日；接受日期：92年5月26日)

摘要

本研究由個人建構與小組互動觀點，分別探究國小六年級兒童對於較為困難的比例問題（數字形式第三、第四式伸縮語意問題）的建構。針對5位學童的文本、訪談、小組討論之資料，採用紮根理論的分析方式，建立概念微型架構圖。

研究結果發現，兒童對於數字形式第三、第四式伸縮語意問題的解題通過率偏低，但是透過個別訪談與小組討論可以消除迷思概念，建構正確的解題策略。

關鍵字：比例、建構主義、數學學習、紮根理論

壹、前言

傳統上，比例問題常安排於國小六年級，是屬於小學階段較為艱難的問題。然而，學童在比例問題的學習上係採用何種策略？如何可以更有效的學習？為了回答這些問題，以下針對本研究之研究動機、目的與問題分別加以說明。

一、研究動機

對於數學教學與學習，近年來有日益強調「生活化」的趨勢，美國數學教師學會（National Council of Teachers of Mathematics，NCTM）在 1989 年《學校數學課程與評鑑標準》（*Curriculum and evaluation standards for school mathematics*）中關於數量關係的說明，明白指出「比」的概念需要由日常生活中事物的討論而漸進式的介紹。早在 1958 年 Inhelder 與 Piaget 的研究曾認為比例推理是形式運思的試金石。而教育部於民國八十九年四月亦公佈國民中小學九年一貫的數學課程目標之第一項即為「掌握數、量、形的概念與關係」，「比」即為數量關係之一環，其重要性不言可喻。

但是在實務上，比例問題的教學卻常常遭到忽略，常常流於先介紹比例運算公式，然後進行比例問題計算。這樣的教學模式常使學生對於比例問題一知半解，甚至完全流於公式的記憶與計算，無法形成真正有意義的學習。

近年來，建構主義的觀點被大量引用到數學教育領域中。依建構主義者的主張，數學教室裡師生的角色有了根本的變化。在學生方面，除了強調學生主動建構數學知識的重要性，也賦予學生更大的主動性與責任。在教師方面，教師由知識權威者轉向協助者、佈題者（problem poser），教師任務由知識的傳遞轉為提供鷹架以促進學生可能建構發展區（zone of proximal development，ZPD）之發展。數學教育轉向建構主義主張，連帶使得研究者不僅想要知道學生的數學學習成就，且將注意力投注於學生數學學習的內涵問題，亦即學生如何建構知識？建構怎樣的知識？等議題。

關於比例問題的探究，楊錦連（1999）研究發現國小學童對於數字非整數倍，且伸縮語意的問題最感困難。因為比例推理概念是更高層級數學能力的入門磚，對於學童解題通過率偏低的這些比例問題，實有必要更進一步去探討學童對於這些問題的認知建構方式，如果這些偏難的比例問題是位於 ZPD 內，數學教師應該思索是否有可能透過什麼樣的活動也讓學生學會？另一方面，社會建構主義者強調經由小組互動有

助於學童發展數學概念，在比例問題的個人認知建構方面遭遇到的困難，如何由小組互動的方式來加以克服？是另外一個重要的課題。

二、研究目的

基於研究動機，本研究之研究目的如下：

（一）探究兒童對於數學比例問題的個人認知建構。

（二）探究小組互動對於解數學比例問題的影響。

三、研究問題

根據前述研究動機與研究目的，本研究之研究問題如下：

（一）兒童對於數學比例問題的個人認知建構為何？

（二）兒童小組互動對於解數學比例問題的影響為何？

貳、 文獻探討

針對研究主題，分別由比例問題的背景、比例問題解題二方面來說明。

一、比例問題的背景

以下由比例問題的分類與教材安排二方面來說明比例問題的背景。

（一）比例問題的分類

對於國小數學課程中之比例問題分類，可由數字關係、題目形態、未知數的次序、語意關係等面向來分類。進一步依照其對等關係，可以簡化為語意結構與數字形式兩方面來加以區分。

1.在語意結構方面，綜合民國 86 年台灣省國民小學教師研習會與 Lamon（1993）的分類，可以區分為交換問題、組合問題、母子問題、密度問題和伸縮問題等五種題型。

（1）交換問題：問題情境為以物易物。例如：如果 9 枝鉛筆要 45 元，那麼 60 元可買幾枝鉛筆？

（2）組合問題：問題情境為兩個量數之間本沒有關係，經過問題陳述後，使產生關連者。例如：如果 15 個小朋友參加趣味遊戲便需要 60 頂帽子，現有 80 頂帽子，可以有多少位小朋友參加遊戲？

（3）母子問題：兩個量數中，一個為全體量，一個為部份量。例如：每 15 個彩球中有 3 個是紅色的，那麼 75 個彩球中會有幾個是紅色彩球？

（4）密度問題：由兩個外延量所組合的比率關係，產生一個內含量的量數。例如：12 毫升的汽油可以行駛 48 公里，那麼 48 毫升汽油可行駛多遠？

（5）伸縮問題：一個量數增加，另外一個量數也增加，一個量數縮小，另外一個量數也縮小，兩個量數之間有固定比值。例如：甲棟房屋高 17 公尺，影子有 85 公尺，同一時間乙棟房屋高 25 公尺，乙棟房屋的影子有多長？

2.在數字形式方面的區分，是由問題情境中之數字關連性來進行的，綜合 Noelting（1980）和林福來（1984）的研究，可將數字型式修訂分為四種，即在比例關係式「A:B＝C:X」中：

（1）第一式：C 同時是 B 和 A 的整數倍。如 2：4＝8：x。

（2）第二式：僅 B 是 A 的整數倍。如 2：8＝7： x。

（3）第三式：僅 C 是 A 的整數倍。如 3：5＝18 ：x。

（4）第四式：C 不是 A 或 B 的整數倍。如 2：5＝7 ：x。

而依據楊錦連（1999）之研究，國小六年級學生對五種比例語意題型之解題表現由易而難分別是：交換問題與組合問題、密度問題和母子問題、伸縮問題。對四種比例數字形式題型之解題表現由易而難分別是第一式、第二式、第三式、第四式。換言之，如果比例問題的語意屬伸縮問題，且數字形式屬第四式，對國小兒童而言是最為困難的。

（二）比例問題的教材安排

民國 64 年版國小數學課程之比例問題主要安排於第十一冊（六上）第十單元（比和比值）與第十二冊（六下）第三單元（成正比）、第六單元（成反比）與第七單元（縮圖與比例尺）。而民國 82 年版國小數學課程標準則將比例問題歸屬於「數量關係」領域，主要亦分布於六年級。

就第十一冊第十單元教材內容而言，並非四種數字形式與五種語意類型的比例問題均平均呈現。在數字形式方面最困難之第四式問題並未呈現，而語意方面最為簡單的交換問題也未呈現。

二、比例問題解題

關於比例問題的解題，可以由解比例問題所需的知識基礎、策略與影響因素三者來加以說明。

（一）學童解比例問題所需之基本知識基礎。

學者認為解比例問題所需要的基本知識基礎有三項，分別是 1.因數與倍數；2.熟悉乘除法情境；3.有理數概念的整體發展（楊錦連，1999；劉祥通與周立勳，1999；Lo & Watanabe，1997）。

就國民小學數學課程內容而言，因數問題是向內探討組成某個正整數的單位量數，而倍數問題則是向外探討以某個整數為單位量數而生成新的正整數。因數問題與倍數問題是兩個不同方向的問題探討方式，因數與倍數是解比例問題的重要基礎。

乘法是單位量數已知，且幾個單位量數已知時使用；除法是乘法的逆運算，可用於取求單位量數。然而，比例問題是乘除法的上位概念，是單位量數除以單位量數。在運算過程中，乘除法的單位量數至少其中之一是已知數，而比例問題的單位量數必須經由計算才能得知。

對於有理數的界定，普遍認為它是一個分數，可以用商數或比率來表示。Kieren（1980）更進一步認為可以由部份-全體、商數、比率與運算子等方面來說明有理數的意義。

綜合上述這些與比例問題關係密切之基本知識，比例問題牽涉了因數、倍數、乘法、除法、分數、小數、有理數等情境與運算，對於這些概念的理解，勢將有助於比例問題的解題。

（二）解比例問題的策略

解決比例問題的策略，可以由解題成功與解題失敗兩方面來看。在解題成功方面，如 Tourniaire 和 Pulos(1985)所述，可分成乘法策略與疊加（building-up）策略兩個基本的型式。而劉祥通與周立勳（1999）則將前述解比例問題的乘法策略之單價法與倍數法獨立出來，成為單價思考策略、倍數思考策略、加法與疊加法策略。

1.成功的解題策略

在乘法策略中之單價法，係指於解比例問題時先求出單位量，再以單位量乘以單位數，例如「西瓜 5 公斤可賣 12 元，8 公斤西瓜共可賣多少錢？」中，先以 12÷5＝

2.4 算出 1 公斤西瓜的單價是 2.4 元。然後再用 2.4x8＝19.2 來算出 8 公斤西瓜共 19.2 元。這是將比值單位化的作法。

乘法策略中的另一種方法—倍數法，如同以上題為例，則先以 8÷5＝1.6 算出 8 公斤的西瓜是 1.6 個 5 公斤，然後再用 12x1.6＝19.2 算出 1.6 個 5 公斤西瓜的價錢。換言之，倍數法是以比例運算式中的同項之間「倍數」概念來進行的。

然而，在乘法策略之中還有一種「公式法」，即十字交乘法。因為此種方法完全是以純粹數字的運算來解題，雖然有快速、精確的優點，但是容易使學童形成公式的記憶，忽略對問題的理解，這種公式法是一種「算則」。

疊加法係指在「A：B=C：D」的問題情境中，學童將 A：B 進行累加，形成 nA：nB 恰為 C：D 的解題方式，這是兒童常使用的解題策略。例如「2 枝黑輪賣 7 元，8 枝黑輪可賣多少錢？」中，學生由 2 枝黑輪 7 元進行累加，獲得 4 枝黑輪 14 元，8 枝黑輪 21 元……，這是一種擴充的推理形式，但是當問題中出現非整數倍的狀況時（例如上題問 9 枝黑輪多少錢），通常只有極少數人能用此策略成功解題。亦即疊加法有其實際運用上的限制，且這種疊加法可能會使學生不使用乘法策略，造成錯誤解題。

2.失敗的解題策略

解決比例問題的失敗策略，除了一般數學問題中較為常見的忽略問題部份資訊、任意的運算、誤解題意、數字計算錯誤之外，最為特別的是「加法策略」。

加法策略又稱為常數差策略，當學童在整數比的問題中以前述疊加法策略成功解題後，會發展出加法策略來解決非整數比的比例問題。例如「3 公尺的竹竿影子長 5 公尺，同時間 8 公尺長的竹竿影子有多長？」學童會以「影子比竹竿長 2（5－3＝2）公尺，所以 8 公尺竹竿的影子是 10（8＋2＝10）公尺」解題。林福來（1984）引用 Karplus、Pulos、Stage、Hart 等人的研究，認為學童使用加法策略主要是為了克服題目的障礙、逃避使用乘法、不會求比值或不作分數計算所造成。

（三）影響解比例問題的相關因素

影響解比例問題的相關因素主要可以區分為問題的特性與學童個人因素兩方面。在問題特性方面，問題的數字關係、題材內容是主要關鍵。數字關係方面，數字是否成整數倍、數字出現的順序以及數字的大小都會影響學童解比例問題。在題材內

容方面，主要與問題語意關連最爲密切，包括是否生活化、問題屬性是外延或內涵等。

在學童個人因素方面，依照 Piaget 的認知發展理論，年齡成熟度顯然是一大重要因素，研究也支持隨著年齡增加，比例問題的解題成功率較高（何意中，1988）。其中，相對的思考和比值的單位化能力是解比例問題的兩個重要思考策略。

參、 研究方法

一、研究參與者的背景

爲了探討國小學生對比例問題的個人認知建構，研究者選擇以學生最感困難的數字形式第三、四式、語意結構伸縮問題進行探究。因此，研究參與者除了具備較佳的數學能力之外，也應該具備較佳的表達能力。

研究者選取南部某鄉村地區國小進行研究。該國小地處鄉村，學生家長多數從事農、工職業，學區交通方便，距離市區約 10 分鐘車程，資訊取得管道不虞匱乏。並由級任教師（數學教師）推薦該班級內 5 名數學能力最佳之六年級學童爲研究參與者，研究參與者由一年級新生入學迄今均爲同班，彼此之間十分熟稔。而該數學教師任教年資 8 年，於大學畢業後修習學士後國小師資教育學分取得國小任教資格。

參與研究學生爲民國 84 年 9 月入學之國小學生，而翌（85）年則由一年級起逐年實施國小新課程。換言之，84 年入學者係最後一屆使用 64 年版教科書學生。

二、資料蒐集工具

在資料蒐集方面，除了相關研究成果的文獻分析整理之外，本研究主要以自編的「比例問題解題量表」爲主要工具，獲取學生對於比較困難比例問題之解題表現。編製過程中，經國小數學教師 2 人以及師資培育機構教授 1 人審定後定稿，量表共有 3 題，解題時間爲 30 分鐘。

量表中，第 1、2 題爲數字形式第三式伸縮語意問題，而第 3 題爲數字形式第四式伸縮語意問題。第 1、2 題的難度較低，而第 3 題的難度較高。另一方面，爲了不讓學生先入爲主的直接運用比例策略進行解題，在量表中並不出現「比例問題」等提示文字。

三、分析資料的方法

本研究資料分析區分爲三部份，即對研究參與者在「比例問題解題量表」中的文本分析、個別訪談原案分析與小組互動資料之分析，前兩者主要係用來對照其通過率與相關研究之間的一致性，並詮釋研究參與者對於比例問題之個人認知建構；小組互動資料的分析則在於了解小組互動對於參與者解題的影響。

在訪談資料的分析中，主要的焦點在於學生對於問題的理解與解題策略的內容分析。分析的策略採用 Strauss 與 Corbin（1998）所主張之發展紮根理論（grounded theory）方式進行。這是一種微觀分析（microanalysis），主要可區分爲開放編碼（open coding）、軸編碼（axial coding）、選擇性編碼（selective coding）三部份。

四、研究進行程序

本研究由文獻分析開始，第一階段進行「比例問題解題量表」之編訂，並經數學教師與數學教育專家審題、修正後，讓研究參與者進行解題。

研究之第二階段爲個別訪談，每位參與者訪談時間約 30 分鐘，全部訪談結束後進入第三階段。

第三階段爲小組討論，主要的議題爲「比例問題解題量表」中的解題，由參與者小組主動進行，研究者擔任討論促進者角色。

五、可信性與有效性

爲確保本研究之可信性與有效性，分別由「研究者即工具」與「多方校正」兩部份來加以說明。

（一）研究者即工具：研究者於師專畢業後擔任國小級任教師，並於師資培育機構進修數理教育學系數學組，畢業後旋即在職進修國民教育研究所，並以數學教育爲碩士論文主題，獲碩士學位。進修博士班課程時主修課程與教學，先後擔任國民小學教職 13 年，並曾獲「特殊優良教師」獎，對於國小課程與教學有相當之關注與理解，能敏銳察覺相關問題。

（二）多方校正：針對資料分析的結果，本研究由三個向度進行可信性檢驗，分別是對照相關文獻，數學教師與數學教育專家三者。分析結果與相關研究文獻對照，在於檢視理論的適切性。此外，除了與研究參與者的數學教師（級任教師）進行討論外，並與同年級其他數學教師共同檢視分析，可以使實務觀點進入研究之中。最後，師資培育機構數學教育專家對於數學教育的專業知識，將有助

於研究資料分析結果的適切性。

肆、 研究結果與討論詮釋

針對本研究之研究成果，分別就個人認知建構與小組互動兩方面來探討學童的數學比例問題建構。個人認知建構方面，資料來自學生在「比例問題解題量表」的表現與個別訪談原案；小組互動方面，資料主要來自本研究第三階段小組互動原案分析。

一、個人認知建構部份

個人認知建構部份，主要在看參與學生對於比例問題的建構，可以分別由研究第一階段「比例問題解題量表」之文本分析與個別訪談原案資料二方面之分析來說明。

（一）「比例問題解題量表」之文本分析

區分為兩部份，分別是學童的解題通過率、解題類型的解題文本。

1.學童在「比例問題解題量表」之解題通過率

首先，由「比例問題解題量表」來看，學生在「比例問題解題量表」之解題通過率如表 4-1 所示。

表 4-1

學生「比例問題解題量表」解題通過率

學生	問題一	問題二	問題三
A	V	V	X
B	X	X	X
C	X	X	X
D	V	V	V
E	X	X	X

說明：V 表示通過解題；X 表示未通過解題。

由表 4-1 可知，在未經提示「比例問題解題量表」為「比與比值」單元之題材狀況下，5 位學生之解題通過率並不若預期。僅有學生 D 全部通過，而學生 A 僅通過難易程度較低之第 1、2 題，學生 B 與 E 則全部 3 題均未能成功解題。整體總通過解題為 5 人次，總通過率僅達 1/3（5/15）。

就問題本身難易等級而言，第三題屬於最難之「數字形式第四式伸縮語意問題」，

而第一、二題屬與難度稍低之「數字形式第三式伸縮語意問題」。第三題僅有學生 D 通過解題，而第一、二題除了學生 D 外，尚有學生 A 通過解題，結果與問題難易程度相符。

2.學生在「比例問題解題量表」之解題類型

分析參與研究學生之解題文本，其解題類型如表 4-2 所示。

表 4-2

學生在「比例問題解題量表」之解題類型

學生	問題一	問題二	問題三
A	單價法	倍數法	加法策略
B	加法策略	加法策略	加法策略
C	加法策略	面積法	加法策略
D	比例關係式之公式法	比例關係式之公式法	比例關係式之公式法
E	加法策略	加法策略	加法策略

由表 4-2 可知，學生在「比例問題解題量表」中使用之解題類型由多到少依序為「加法策略」（9 人次）、「比例關係式之公式法」（3 人次）、「面積法」（1 人次）、「單價法」與「倍數法」（各 1 人次）。其中能正確通過解題者為比例關係式之公式法、單價法與倍數法三者。

（二）個別訪談原案分析

在個別訪談資料分析方面，依照 Strauss 與 Corbin（1998）所主張之紮根理論方式，首先進行開放編碼，將所得到的概念整理如表 4-3。

表 4-3

訪談資料開放編碼概念

來　源	概　念
訪談原案共五則	相似、加法相似、面積、面積法、信心、單價法、圖示、倍數法、加法策略、類推、未知項、混亂、單位、公式法、比例關係式、比值分數、移項、公式記憶、歸納

表 4-3 所列出概念共 19 項，其次，在軸編碼階段，主要係將開放編碼中獲得的

概念，依照其特性與範圍予以建立關聯性，並形成資料類別。就前述分析所獲得之概念，所獲得之軸編碼情形如表 5-4。

表 4-4

訪談原案軸編碼

資料類別	概　念
解題策略	加法策略、倍數法、面積法、單價法、比例關係式、公式法、圖示
問題情境	相似、加法相似、面積
比值概念	移項、公式記憶、單位、未知項、比值分數
自我概念	信心、混亂
邏輯	類推、歸納

由表 4-4 訪談原案軸編碼結果，可以進一步區分出「解題策略」等 5 個資料類別。

以下就個別訪談原案之分析，就學童對比例問題訪談所得到之概念，依照其特性與範圍，建立關連微型架構如圖 4-1。

1.學生比例問題個人認知建構微型架構

參與學生對於比例問題之個人認知建構微型架構如圖 4-1：

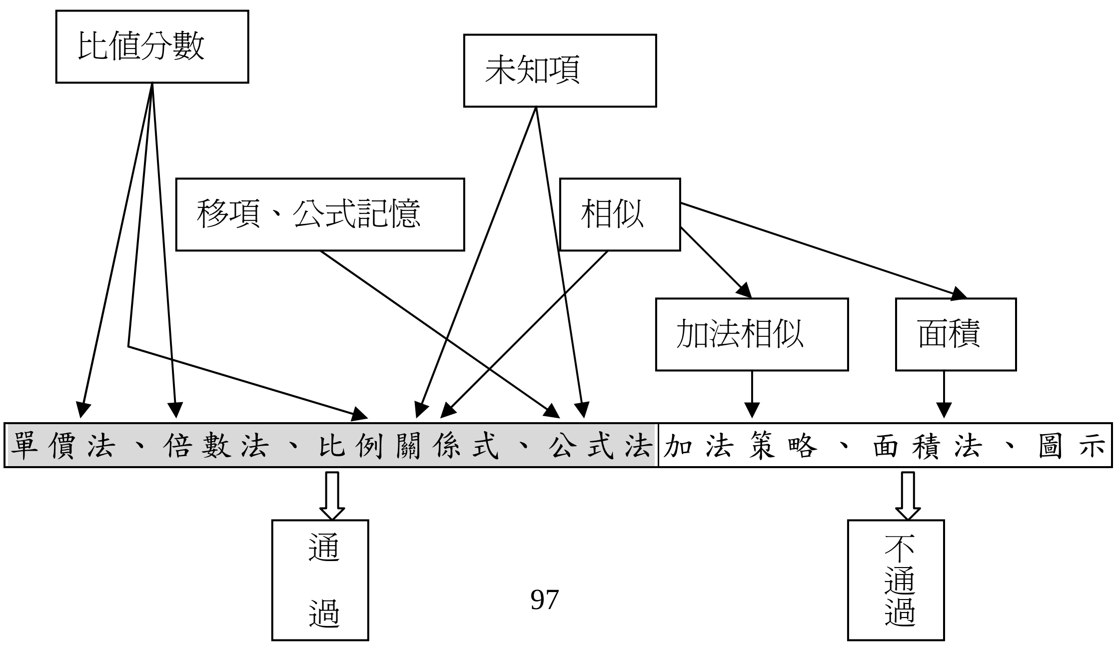


圖 4-1 學生比例問題個人認知建構圖

為了使資料分析結果更為明確，以下針對圖 4-1 與訪談原案內容進行故事情節說明：

（1）整體而言，學生對於數字形式第三式之伸縮語意問題採用的解題策略除了成功通過解題之單價法、倍數法、比例關係式之公式法外，尚有解題失敗之加法策略以及面積法。例如：

TC13：第二題呢？

C13：我是先求出甲（長方形）的面積，然後乙（長方形）的寬是 30，然後長乘寬等於面積【面積】，我就把它（乙）的長當作是某數【未知項】，它（乙）的寬是 30，就某數乘以 30 等於乙的面積【面積法】。

B03：用甲棟的影子減去它的高，乙棟的高加上它們倆個減出來的【加法策略】。

TB04：為什麼這麼做？

B04：因為（甲棟）影子比甲棟高了 72 公尺，乙棟的高度（60 公尺）加 72 就是影子【加法策略】。……。

TB05：第二題呢？

B05：因為它的形狀相同【相似】，長度多出來的應該都相同【加法相似】。

TB06：什麼長度多出來？

B06：它的長和寬。乙的寬比甲的寬多 20，它（乙）的長也會多它（甲）20【加法策略】。

B04：因為（甲棟）影子比甲棟高了 72 公尺，乙棟的高度（60 公尺）加 72 就是影子【加法策略】。……。

其次，對於數字形式第四式之伸縮語意問題，除了成功通過解題之比例關係式之

公式法外，尚有解題失敗之加法策略。例如：

A11：我覺得是這個（甲的底）和這個（乙的底）差多少，然後這邊（甲圖高）也就和這個（乙圖高）差多少【加法策略】，就是用這邊和它差多少，然後這邊也就是和它差多少【加法策略】。

特別是加法策略，使用原因係因為對於問題情境的錯誤認知，與林福來（1984）所稱「學童使用加法策略主要是為了克服題目的障礙、逃避使用乘法、不會求比值或不作分數計算所造成」不同。

（2）具有比值分數概念者，可能會採用單價法、倍數法、比例關係式等正確解題策略（見圖 4-1）。

（3）移項、公式記憶和公式法之使用有密切關係（見圖 4-1）。

（4）學生發展比例關係式與公式法，必須具備未知項概念（見圖 4-1）。

（5）對於相似的概念，學生雖顧及「形狀相同、大小不同」的概念，但是實際上卻有極高機會導致錯誤的「加法相似」概念以及「面積相同」概念。「加法相似」概念會誤認「擴大」是「加法」上的關係，而不是倍數關係，以致於採用了錯誤的「加法策略」解題；「面積相同」概念會忽略「形狀相同、大小不同」的相似假定，以致於使用「面積法」，而成為「大小相同、形狀不同」現象，無法通過解題。例如：

E15：第四題就是圖形都一樣，只是大小不一樣【相似】，所以就用它這邊不知道，只有這兩邊知道，如果圖形形狀都一樣，就是把它減掉這邊（30-18），再加上甲圖的高就可以求出乙圖的高【加法策略】。

C13：我是先求出甲（長方形）的面積，然後乙（長方形）的寬是 30，然後長乘寬等於面積【面積】，我就把它（乙）的長當作是某數【未知項】，它（乙）的寬是 30，就某數乘以 30 等於乙的面積【面積法】。

（6）在類推概念上，除了單價法、倍數法與面積法未出現類推外，其餘策略均有類推現象。而單價法、倍數法與面積法缺乏類推的原因不在策略本身，而在比例問題類型的差異，亦即使用單價法、倍數法與面積法解題者，可能無法

在各種比例問題均使用相同解題方法。而比例關係式公式法與加法策略兩者在類推上可以跨越不同的比例問題類型，亦即使用此兩種解題策略者可能會在不同的比例問題上均採取相同的策略（例如學生 B、D、E）。

（7）在比例關係式的運用上，偏向使用公式法，雖能提升運算效率，但是潛藏缺乏對比值概念深層理解的危機。例如：

TD03：第一題你怎麼做？

D03：就是老師說的交叉相乘法【公式法】。

TD06：好，那這裡為什麼要 20 乘以框框、92 乘以 60？

D06：……（沈默 5 秒），不知道。因為數學老師說這樣寫【公式記憶】。

（8）除非問題帶來困惑，否則學生通常不使用「圖示」解題。在本研究中，遭遇困難後所使用的圖示方式，通常還是無法解題成功（見圖 4-1）。

二、小組互動部份

由小組互動來看學生對比例問題的建構，可以由小組互動原案資料來進行分析。以下先由兩次小組互動資料進行開放編碼與軸編碼開始，並提出微型架構。

在進行編碼之前，先將兩次小組討論之程序加以整理說明。兩次小組討論之程序，分別以圖 4-2、圖 4-3 表示，以下分別說明各次討論程序。

第一次小組討論進行的程序大略如圖 4-2 所示。

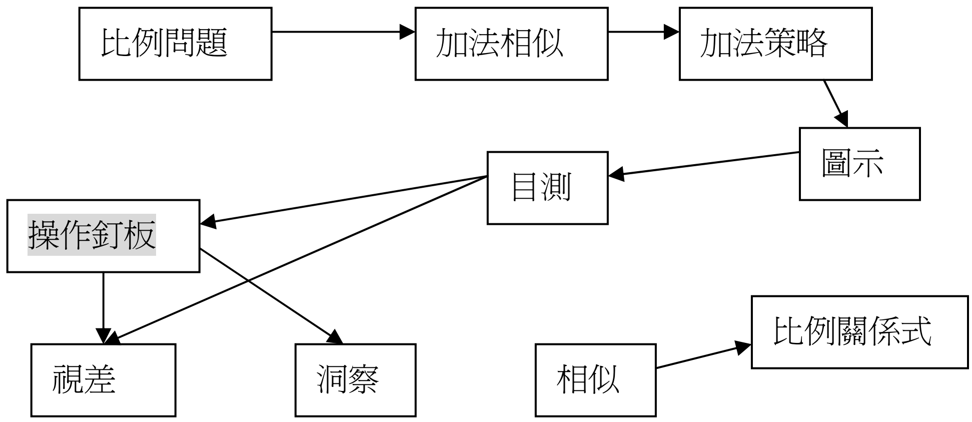


圖 4-2 第一次小組討論進行程序圖

第一次討論由第三題起頭，學生對於「相似」的建構明顯有所不同，加法相似的觀點導致使用錯誤的加法策略解題。學生在圖示活動中並沒有理解加法相似的缺失，由研究者建議採用***釘板造形***活動[1]，在各自的操作過程中，學生起先因爲「視差」因素，確信加法相似成立，但在釘板造形的邊長加大後，發現邊長分別增長相同長度後所得形狀與原形狀並非相似，因而在「相似」概念方面有極大的開展，經由反覆操作而理解加法相似會造成不相似的圖形，藉此建構比例問題「比例關係式」之使用。

第二次小組討論進行程序經整理如圖 4-3 所示。

比例問題 → 共識 → 比值 → 應用

圖 4-3 第二次小組討論實施程序圖

第二次小組互動同樣由第三題開始，在形成解題共識後，研究者拋出「比值」概念，在討論中學生提出不同的「比值」建構，最後並將討論議題轉移至比例概念的應用上。

接著，將小組互動原案資料進行開放編碼後，依照其特性與範圍予以建立關聯性，並形成資料類別。就前述分析所獲得之概念，所獲得之軸編碼情形如表 4-5。

表 4-5

小組討論原案軸編碼

資料類別	概念
解題策略	比例關係式、加法策略、面積法、單價法、圖示
溝通互動	對立、反例、例外、寫作

[1] 先以橡皮筋在釘板上圍出幾何形狀（本例中學生排列三角形），再取不同顏色橡皮筋在每個邊上增加相同長度另圍出一個幾何形狀。以比較兩者是否具備「相似」性質。

資料類別	概　念
比值概念	比值、分數、比例、未知項
問題情境	面積、加法相似、相似
幾何	放大
想法驗證	實測、視差、證明
先前經驗	經驗、未經驗
反思抽象	反思質疑、應用、類推、修正

由表 4-5 之資料類別抽取結果，試圖建立學童對比例問題之小組互動微型結構，如圖 4-4 所示。

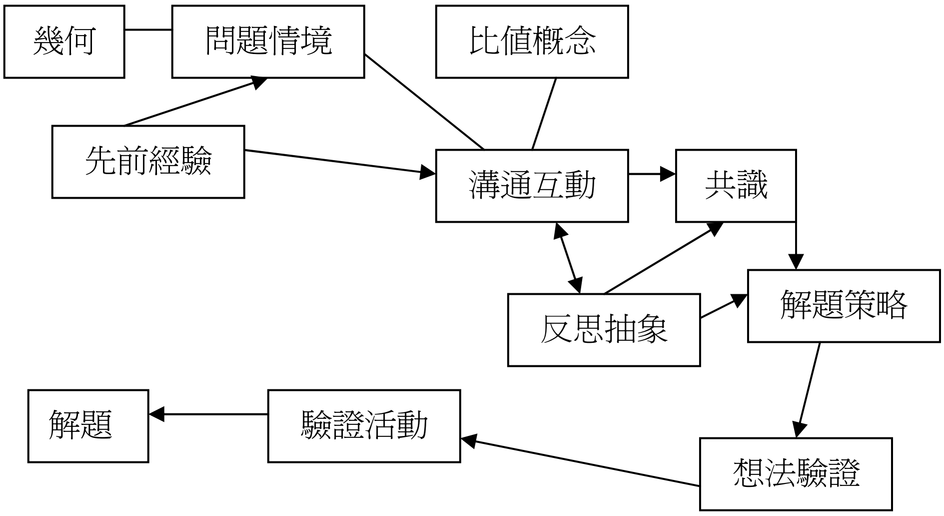


圖 4-4 學童對比例問題之小組互動微型結構

以下就圖 4-4 所示，經過小組討論，學童在討論過程中提出自己的想法與他人分享，對於學生比例問題小組互動情形說明如下：

（一）先前經驗影響學童對於問題情境的詮釋，而且學生帶著各自不同的經驗進入溝通互動。先前經驗對於學童之自信、情緒均有所牽連。例如：

SC09：就是用乙的底減去甲的底，那個差的長度加上甲的高就是（答案）了【加法策略】。

SD14：應該用甲圖的高比乙圖的高，會等於甲圖的底比乙圖的底【比例關係式】。

T24：這兩種作法不同，哪個可能是對的？

SA14：當然自己作的是對的。

（SB、SC 埋頭在紙上計算）……

（二）溝通互動的主要內容爲問題情境與比值概念，在溝通互動的過程中是一個不斷反思抽象的循環過程（提出加法相似概念-目測-從眾認爲加法相似要件成立-另行操作釘板造型活動-證實加法相似的目測視差謬誤-形成比例概念-再次解題），直到達成共識與形成一致之解題策略。

（三）解題策略形成後，在小組討論中更進一步提出想法驗證，以確證策略之可行性（圖示後以目測方式來證明加法相似概念，發現圖形放大後，看似相似的兩個圖形不再相似，轉而尋找其他途徑）。而想法驗證將透過驗證活動（目測、釘板造形活動及實測）來完成其解題的目的。

（四）小組討論的過程中存有「從眾現象」，亦即，群眾或社會的力量會導致學童放棄自身意見。在以釘板造相似三角形的活動中，因爲同儕的堅定立場而使學童對於其間差異視而不見，直到進行實測後始推翻從眾見解。例如：

SC11：哎喔，那就是放大的原理嘛【放大】，所以形狀應該還是一樣的【相似】。

SA19：所以我們覺得兩邊同樣增加後【堅定】，還是一樣。因爲遠距離看都一樣。

（SB、SD、SE 一致點頭同意）

就圖 4-4 學童對比例問題之小組互動微型結構來看，學生將焦點放在問題的情境因素中，使數學問題不只是數學領域，更牽涉跨學科領域的概念。

伍、 結論與建議

綜合研究結果與討論詮釋，提出研究結論與建議，俾使對實務工作者以及本領域之研究人員有所助益。

一、結論

由個人認知建構、小組互動兩個向度分別探討五位學童對於比例問題的建構，歸納研究結論如下。

（一）個人認知建構方面

（1）在解題通過率方面，五位學童在數字形式第三式與數字形式第四式之伸縮語意比例問題之解題通過率不如預期。

（2）在解題策略方面，五位學童解比例問題的正確策略主要爲比例關係式之公式法、單價法、倍數法。

（3）在迷思概念方面，五位學生面對「相似」概念之問題情境，常使用「加法相似」的概念；幾何圖形題會出現「面積相等」的迷思。

（4）在錯誤解題類型方面，情形最多者爲「加法策略」，其次爲「面積法」。

（5）在策略的類推上，與策略能否成功解題無太多關連，錯誤策略與正確策略均傾向類推使用。

（6）在表徵方面，除非問題會帶來困惑，否則學生通常不主動使用「圖示」協助解題。

（7）在比例關係式的運用上，五位學生偏向公式法的記憶操作，雖能提升運算效率，但是潛藏缺乏對比值概念深層理解的危機。

（二）小組互動方面

（1）先前經驗影響學童對於問題情境的詮釋，而且五位學生帶著各自不同的經驗進入溝通互動。

（2）溝通互動的主要內容爲問題情境與比值概念，在溝通互動的過程中是一個不斷反思抽象的循環過程，直到達成共識與形成一致之解題策略。

（3）解題策略形成後，在小組討論中更進一步提出想法驗證，以確證策略之可行性。而想法驗證將透過驗證活動來完成其解題的目的。

（4）小組討論過程存有「從眾現象」，亦即，群眾或社會的力量會導致學童放棄自身意見。在釘板造形活動中，因爲同儕的堅定立場而使學童對於測量誤差視而不見，直到圖形放大後，始察覺其中視差問題。

二、建議

以下分別對實務工作者（教師）與未來研究（研究者）兩方面提出建議。

（一）對實務工作者的建議

對於實務工作者的建議區分爲課程、教學兩方面。

1.在課程方面，在各種不同比例問題形式中，數字形式第三、四式的伸縮語意問題確實較爲困難，在編排上，更爲生活化的問題情境（例如影子長度）優於較爲抽象的幾何情境問題（例如三角形相似），而且驗證活動應一併納入教材中。

2.在教學方面，即使數字形式第三、四式的伸縮語意問題確實較爲困難，但是輔以小組討論以及相關的驗證活動，學童可以理解問題，形成正確解題策略。比例關係式的教學應該避免直接引入公式法，而使學生對於比例概念理解不夠。

（二）對未來研究的建議

就研究之結果與歷程，由研究主題、研究工具分別提出建議如下。

1.對研究主題的建議

由研究結果顯示，學童在比例問題的建構上，因爲問題情境的關係，尙與數學之幾何概念，以及自然科學領域之日光--影子概念有所關連。顯然單一數學概念之研究，結果往往與學科內其他概念，或其他學科領域概念有關，這些研究焦點主題之外的相關概念對於未來課程統整設計、主題教學模組開發均有助益。在研究上，與比例概念相關之幾何概念，亦可爲後續研究之努力方向。

2.對研究工具的建議

（1）本研究主要建立於研究者自編之「比例問題解題量表」。基於建構主義在發展學童 ZPD 的意涵，以數字形式第三式與第四式之伸縮語意比例問題三題，而未將數字形式第一式、二式之其他語意比例問題納入。如要建立更爲完備之比例概念建構架構，可再納入其他不同類型問題，增加理論飽和度。

（2）國內對於兒童比例問題概念發展之相關評量工具依舊缺乏，尙有待進一步開

發。

參考文獻

台灣省國民小學教師研習會（1997）：**數學實驗課程教師手冊第十冊**。台北：台灣省國民小學教師研習會。

何意中（1988）：國小三、四、五年級學生比例推理之研究。**花蓮師院學報，2**，387-433。

林福來（1984）：青少年的比例概念發展。**科學教育月刊，73**，7-26。

楊錦連（1999）：**國小高年級兒童解決比例問題之研究**。 未出版碩士學位論文，嘉義：嘉義師院國民教育研究所。

劉祥通、周立勳（1999）：國小比例問題教學實踐課程之開發研究。**台中師院數理學報，3**（1）。

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. NY: Basic Book Inc.

Kieren, T. E. (1980). Knowing rational numbers: ideas and symbols. In M. Lindquist(Ed.), *Selected issues in mathematics education*(pp. 72-88). Chicago: National Society for the Study of Education.

Lamon, J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children’s thinking. *Journal for research mathematics education, 24*(1), 41-61.

Lo, J. J., & Watanabe, T. (1997). *Development ratio and proportion schemes: a story of a fifth Grader.* American Education Research Association.

National Council of Teachers of Mathematics(1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA : The Council.

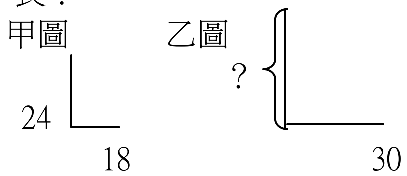
Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I- Differentiation of stages’. *Educational studies in mathematics, 11*, 217-253.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basic of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd ed.). London: SAGE Publications.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: a review of the literature. *Educational studies in mathematics*, *16*, 181-204.

附件一：「比例問題解題量表」

姓名：

1.有兩棟樓房,甲棟高 20 公尺，影子長 92 公尺，在同一時間，乙棟高 60 公尺，那麼乙棟樓房的影子有多少公尺？	3.如果甲圖和乙圖形狀一樣，但乙圖比甲圖大，乙圖還沒有畫完的另一邊有多長？ 
2.甲、乙兩個是相似長方形（形狀相同，大小不同)，甲的寬是 10 公分，長 50 公分，乙的寬是 30 公分，求乙的長是多少公分?	

The Construction of Proportion Problems of Schoolchild

Tzong-Ming Wey[1] Shiang-Tung Liu[2]

[1]Early Childhood Development and Education,Chaoyang University of Technology
[2]Graduate Institute of Mathematics Education, National Chiayi University

Abstract

This study adopted individual construction and group interaction to investigate the harder proportion problems solving of sixth grade schoolchildren. The grounded theory method was used to analysis the text, interview and group discussion data from five schoolchildren to built micro-concept figures.

According to this study, although children's problem solving ability on the stretcher-shrink problems of numeric type III and IV were insufficient, through individual interview and group interaction could eliminate myth and construct correct problem solving strategies.

Keywords: constructivism, grounded theory, mathematic learning, proportion problem.