# 以數學積木協助學童克服小數迷思概念的個案研究

黃偉洲[1] 劉祥通[2]

[1]雲林縣虎尾國民小學
[2]國立嘉義大學數學教育研究所所

（投稿日期：91年9月14日；修正日期：91年10月21日；接受日期：91年12月15日）

## 摘要

本研究旨在探討以數學積木協助研究個案克服小數迷思概念的教學進展，採用個案研究法，半結構式問題大綱在訪談之前設計，研究對象是一位國小六年級有小數迷思概念的學童。教學處理包括分割活動與表徵活動。探討的題材是有關小數的化聚問題。研究結果顯示研究個案經由數學積木的輔助可以克服原先小數的迷思概念。

關鍵詞：數學積木、小數概念、迷思概念、化聚問題。

# 壹、前言

十五世紀以來，小數便開始廣泛地被應用到數學領域上（Thipkong, 1988），而隨著公制的需要、科技的發達，以及電腦與計算機的普及，精確使用小數變成現代人必備的數學語言（mathematics language）（Hiebert & Wearne, 1983）。

然而，小數對於學童而言是容易的嗎？根據國外有關對小數的研究發現，學童在小數問題的解題表現事實上並不理想（Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist & Reys, 1981; Bell, Swan & Taylor, 1981; Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985）。許多研究指出學童普遍缺乏小數概念，例如：學童對於小數的位值缺乏理解（Lichtenberg & Lichtenberg, 1982）、欠缺對於小數符號之語意意義（semantic meanings）（Hiebert, 1984; Hiebert & Wearne, 1984; Lesh & Landau, 1983）。而我國的研究（簡茂發和劉湘川, 1993；艾如云, 1994；杜建台, 1996；吳昭容, 1996）也顯示，對於小數學習已超過兩年多的國小六年級學童而言，仍會產生不少的小數迷思概念。

檢討過去傳統的小數教學，Post、Behr 和 Lesh（1982）認為一般教師花太多時間於程序性的技巧與計算方面，忽略了基礎性的概念發展。Owens 和 Super（1993）發現有些教師覺得教導程序性的技巧與計算，會比教導概念性知識容易進行，這造成學童在一開始學習小數時，就沒有建立好穩固的小數概念（Grossman, 1983）。

小數係屬於有理數的範圍，而有理數的表徵方式可分成實物情境（real-world situations）、口語符號（spoken symbols）、文字符號（written symbols）、圖形（pictures）以及教具模型（manipulative models）等（Lesh, 1979）。美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM) 出版的學校數學課程與評量標準（*Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, NCTM, 1989）主張教師在進行數學教學時，應鼓勵學童去做數學（doing mathematics），教室裡提供各式各樣的教具模型讓學童實地操作，以促進那些較抽象之有理數概念的學習。此書也強調小數的教學方法應類似於分數的教學，在教具模型上持續的強調，以此和小數符號產生連結。由於數學積木是教具模型的一種，屬於較具體的表徵方式，也易於被學童所掌握，因此數學積木可以成為國小學童在學習小數時主要的運思材料與溝通工具。

從民八十二年版有關小數概念教材中發現，三、四、五年級的課程安排是依照一

位小數、二位小數、三位小數的順序，分別介紹有關小數的意義、位值、與化聚（教育部, 1993）。而解化聚問題之前必須先了解小數的意義與位值概念。可以說小數的化聚問題在小數單元佔有重要的地位，限於篇幅，本文只針對小數化聚問題進行探討。因此，本研究探討個案在解小數化聚問題時，以數學積木來幫助學童克服小數迷思概念的進展歷程。

# 貳、文獻探討

本研究的主要目的是透過數學積木的操作，探討學童小數化聚問題的學習效果。以下分別從學童小數學習的認知過程、表徵的類別與功用、數學積木在小數學習上的價值來闡述。

## 一、小數學習的認知過程

分析學童小數學習的認知過程，可以從以下兩方面來探討：

### （一）Hiebert 和 Wearne 的論點

Hiebert 和 Wearne 認為學童必須經由五個認知過程來累積與熟練小數符號的能力，其主張的五個認知過程如下（Hiebert, 1988; Wearne & Hiebert, 1988a, 1988b）：

（1）連結過程（connecting process）

連結過程是學童小數學習認知歷程的首要步驟，在這個過程中，學童將他們所熟悉的指示物（referents）與小數符號產生連結。例如，學童看到「1.8」的小數符號時，會回憶起心中早已表徵的心像（mental image）：「1.8」中的 1 可能是裝滿 1 公升的汽水，而「0.8」可能是 0.8 公升，甚至是 800cc 的汽水。若是小數符號背後所代表的指示物是顯而易見時，學童對於小數符號的意義才會易懂且清楚。

（2）發展過程（developing process）

發展過程是指學童隨著在指示物上的操弄，所發展出來處理小數符號的程序。此程序乃是把符號給予擴大的結果。例如，學童可以透過分別代表兩個小數的數學積木的合成動作，用來表示兩個小數符號相加的過程，進而發現相對於小數點具有相同位置的數字，就是具有相同的位值。

（3）精緻化過程（elaborating process）

精緻化過程指的是從已建立的連結與發展過程，擴展到其他適當情境的一種語法程序（syntactic procedures）的過程。例如，學童可運用之前已學習到小數乘法問題之運算（例如，8×0.3），遷移到比較複雜的小數乘法問題的運算（例如，0.8×0.3）上，此乃是精緻化過程。

（4）例行性過程（routinizing process）

例行性過程是指經由精緻化過程之反覆地練習之後，學童可以更有效率地運用小數符號解決問題的一種過程。換言之，學童在經過一段時間練習之後，只需要花費少許心思，即可自動地執行例行性問題的小數運算程序。

（5）**建造過程（building process）**

建造過程是數學符號能力發展過程中的最後一個階段。學童把之前所學過的數學符號與規則，當作是新的數學符號系統的指示物，並把前述的四個認知過程重新再循環一次，以建立更抽象的數學符號系統。

從上述的五個認知過程來看，連結過程是小數學習中最早且不可或缺的一個重要過程，但也是一個極需要長時間發展且複雜的語意過程（semantic processes）（Schoenfeld, 1986；Wearne, 1990）。小數符號與指示物之間若沒有建立正確的連結關係的話，就轉移到發展過程、或精緻化等過程，那麼學童往後的小數學習將會出現問題。雖然連結過程對學童而言，可能不是最有效的解題技巧，但卻是最有意義的。

**（二）D’Entremont 的論點**

D’Entremont（1991）認爲小數學習的認知過程包括五種不同的層次，每一種層次是被外面的層次逐層所包圍的。概念性知識是小數知識的核心，學童爲了要獲得小數的概念性知識，必須一層一層的把上層的表皮給予剝掉，茲分別說明如下：

（1）具體物的層次（the concrete-objective layer）

具體物的層次是小數學習的第一個步驟，教師必須透過真實世界可見的物體來引導學童進入小數的世界。例如，我們可用數學積木來介紹小數位值概念，如果我們把平面的數學積木視爲單位「1」，則長條型的積木視爲「0.1」，最小的積木則視爲「0.01」；除此之外，我們也可以將整個立方體積木視爲單位「1」，則平面的積木視爲「0.1」，長條型積木視爲「0.01」，而最小的積木則爲「0.001」。

（2）操作說明的層次（the operative-interpretive layer）

操作說明的層次所指的是教師從原先使用具體物進行教學的方式，轉換成以小數的符號表徵形式呈現的教學方式，其教學內容包括小數符號的介紹以及如何應用小數符號。

（3）程序的層次（the procedural layer）

會使用算則進行運算的學童，並不代表該生就一定理解算則背後的意義，也不一定會去反省自己運算的程序。

（4）心智模式的層次（the mental model layer）

大部份學童雖然在程序層次時的計算表現還算不錯，卻無法達到最後一個層次，可見應該還有一個介於這兩者之間的層次，即是心智模式的層次。學童在心智模式的層次不但不會盲目地遵循計算算則的公式，而且還能清楚地知道他們解題時的理由。

（5）抽象的層次（the abstract layer）

最後一種是抽象的層次，此時學童對於小數已有不錯的直覺，不再需要可見的物體來幫助理解。他們對於「如何處理小數的問題」、以及「爲什麼」皆能夠給予統整起來。學童唯有達到這個階段，才可獲得小數知識的核心---小數概念的理解。

不過，一般數學教師往往未能在具體物層次打下良好的基礎，就轉移到操作說明或程序的層次進行教學，這不僅造成學童小數學習上的困難，也無法獲得小數的概念性知識，同時對數學態度與信念產生許多的不良影響。

## 二、表徵的類別與功用

表徵是用某一種形式，將一種事物或想法重新表現出來，以達成溝通的目的。也可以說表徵是將原有的某個東西，以另外一個形式表現（蔣治邦, 1994）。最早將表徵給予分類的學者是 Bruner，他將人類認知的表徵加以區分爲三種表徵的方式：動作的（enactive）、形像的（iconic）、以及符號的（symbolic）表徵。Bruner 認爲在學童成長期中，學習事物的程序，一般都是由具體到抽象，多半是須先使用動作表徵方式學習，而後逐漸抽象化升高爲形像與符號表徵（引自張春興和林清山, 1988）。

Lesh（1979）除延伸 Bruner 的觀點之外，另從溝通的角度將表徵進行分類。他探討有理數時提出「非線性表徵系統模式」（non-linear representational systems model），將表徵方式分成五種：（1）實物情境：是指利用實物或真實情境的東西與知識等，用來表示問題中的情境與內容；（2）口語符號：是指在日常生活的談話中，經常會使用到的符號，例如零點二五公里、十分之一個蘋果等；（3）文字符號：是指在日常生活當中，書寫時常會用到的符號，例如 5.3、8/10 等；（4）圖形：是指二度空間的圖形模式，例如面積圖、與數線圖等；（5）教具模型：是指必須在許多數學概念的配合下，才顯得有意義的一些教具，例如數學積木、定位板、圓形分數板等。而這五種表徵方式在有理數概念發展期間彼此呈現互動的複雜關係，學童唯有能在各種不同的表徵方式中自由的轉譯，才有機會獲得有意義的學習。然而，表徵具有「多義性」，故教師在教學活動中應重視學童的學習情況，應隨時檢查所使用的表徵，是否已傳遞了預設的意義（蔣治邦, 1994）。

因此，表徵在數學活動中最主要具有兩種功能：一是作為溝通的工具，是用某種表徵方式來描述活動的經驗；另一是作為運思的材料，舉例來說，低年級學童在解題時以具體物做為運思的材料，運思完後再用口語符號來溝通運思的結果（蔣治邦, 1994）。可見表徵的產生，主要是源於溝通概念的需要，教師在進行教學時，需要表徵作為學童運思的材料與溝通的工具。

### 三、數學積木在小數學習上的價值

對學童而言，表徵的功能不僅與自己做溝通，同時也是與他人溝通的工具。藉由不同的表徵方式能給抽象的數學概念提供具體的經驗，因此教師在進行數學教學時，應隨時隨地提供具體的表徵方式讓學童實地操作，以作為溝通之用（Spikell, 1993）。Huinker（1992）認為學童在發展小數概念時，必須經歷單位小數 1、0.1、0.01…等模型與小數符號產生連結的具體經驗。NCTM（1989）也建議學童從週遭環境中尋找具體物作為數的指示物（referents），以幫助發展學童的數感常識（number sense）。Hiebert 和 Wearne 主張學童在連結與發展的小數學習認知過程中，宜善用數學積木以作為小數符號的指示物。

對於數學積木在小數學習上的價值已獲得了實徵證明。例如，Hiebert 和 Wearne 為了驗證數學積木對於學童小數概念的教學效用，做了一系列的教學實驗。他們設計了許多教學活動，用來鼓勵學童將數學積木與小數符號連結起來。結果證實學童經由上述的教學活動，能夠在連結與發展兩個認知過程中獲得較好的發展。而這種概念上的理解，不僅幫助學童解決例行性或非例行性的小數問題，還能監控自己本身解題時

的表現，且能不依靠公式法則來解決問題（Hiebert, 1988; Wearne & Hiebert, 1988a, 1988b）。

而上述這些接受數學積木教學方式的學童，如果經過比較長的時間之後，是否還保留著教學的效用呢？Wearne（1990）為了解答這個疑惑，特別安排四年級學童參與一個為期兩個禮拜之小數教學實驗，經過一年之後，再對這些學童作晤談與紙筆測驗，並與傳統班級做比較。結果發現這些參與教學實驗的學童在經過一年之後，還是懂得使用小數符號的意義作為解決問題的基礎。同時與傳統教學之下的學童做比較，發現程度低的學童從這種概念性的教學（conceptually-based instruction）中受益是最多的。

## 參、研究方法

本研究旨在探討數學積木對於幫助國小六年級學童解決小數化聚問題的成效為何。為達成上述之研究目的，本研究是屬於個案研究，採用半結構問題晤談。底下將依照研究對象、研究工具、教學活動、研究程序、以及資料的處理來分別作說明。

### 一、研究對象

從研究方法及目的來看，本研究將以一位具有小數迷思概念的學童作為研究對象。故本研究擬採取立意取樣的方式，從研究者所任教的學校中選取適宜的對象。研究者在預試的晤談中發現：小銘對於小數比較大小問題經常以小數點作為分界，並將小數點右邊之小數部份視為整數看待，可見他在小數概念上應出現問題。故研究者在得到小銘參與本研究的意願後，決定以他作為本研究的個案。根據小銘的級任導師的說法，小銘平常在校相當安靜，只跟幾位同學接觸。在功課方面則差強人意，唯獨數學理解能力很差，上數學課時注意力也並不集中，缺乏主動學習的態度，而他自己也承認最討厭數學。

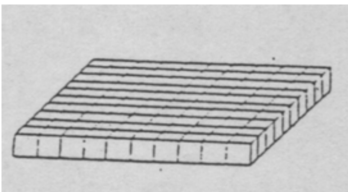
### 二、研究工具

本研究屬於質的研究，研究者即是研究工具（the researcher is the instrument）。研究者不但是資料的蒐集者，也是資料分析過程的中心，研究者所蒐集到資料之效度與信度，有相當大程度是取決於研究者的方法論技巧、敏感度與誠實（Patton, 1990，載於吳芝儀和李奉儒譯, 1995）。因此，參與本研究的人員共有兩位，包括研究者以及一位數學教育師資培育者，分別敘述如下：首先，研究者自師院數理教育系畢業後

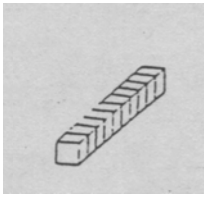
有 10 年的國小教學經驗，目前已從師院國民教育研究所畢業。第二位是劉老師，目前在師院數學教育研究所任職，是國小數學師資的培育者，且長年從事國小數學教育的研究。在此研究中，研究者除了擔任實際教學的角色外，還擔任教學前後晤談者的角色，以及負責蒐集資料，架構研究的程序。劉老師則負責研究者所分析的資料，檢驗其適當性。

## 三、教學活動

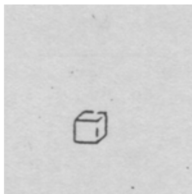
本活動是以數學積木爲教具模型，當作小數符號的指示物，希望透過數學積木的操作來幫助學童了解小數概念，進而消除學童小數迷思概念。教學時所用的數學積木與所代表的數值，如底下的說明：



藍色積木：1



橘色積木：0.1



白色積木：0.01

本文所進行的教學活動，包括分割活動以及表徵活動兩種。

（一）分割活動：分割活動是指將數學積木進行十等分割與一百等分割的動作，用來幫助小銘獲得不同大小數學積木所代表的數值。其教學內容有：

（活動 1）橘色積木與 0.1 產生連結。

（活動 2）白色積木與 0.01 產生連結。

（二）表徵活動：表徵活動的目的是爲了加強學童掌握小數的意義。老師若能透過具體的表徵活動，以幫助學童了解單位小數與所對應的指示物的對應關係，如此他們較能體會該小數所代表的數量。劉曼麗( 1998)也主張：透過做數活動以表徵小數的多少，可以增進學童對小數意義的掌握。因此，研究者要求學童將小數符號與數學積木互換，以此指導小數化聚問題。教學內容大致如下：

（活動 3）一位小數（以 0.a 表示）與 0.1 之間的化聚問題

（活動 4）二位小數（以 0.ab 表示）與 0.01 之間的化聚問題

（活動 5）一位小數（以 0.a 表示）與 0.01 之間的化聚問題

### 四、研究程序

#### （一）準備階段

準備階段的主要工作包括：（1）資料蒐集與文獻整理；（2）設計出數學積木教學活動的教案，並尋求兩位國小六年級學童進行預試；（3）研究者於本校六年級學童當中，尋求一位具有小數迷思概念的學童（小銘）作爲本研究的個案。

#### （二）實施教學前小數化聚問題的晤談

正式進行教學活動之前，本研究之受訪學童（小銘）先接受前測。而爲了避免受訪學童正常的上課時間，研究的時間均安排在星期六下午課餘時間實施，每次晤談的時間約一個小時，晤談的地點則選在沒有學童上課且安靜的教室內。

#### （三）實施教學活動

進行個別教學，教學的時間與地點跟教學前的晤談相同。

#### （四）實施教學後小數化聚問題的晤談

數學積木教學活動結束約一個月半之後，實施後測，所問的問題與教學前的晤談一樣。同時，晤談的時間與地點也跟教學前的晤談相同。

### 五、資料的處理

本研究分析的資料包括小銘教學前後小數化聚問題的晤談、以及所實施數學積木教學活動的內容等。而上述之原始資料需經過轉譯、編碼、分類、歸類等階段，並進行持續比較（constant comparison）來考驗假設。例如研究者對教學前晤談資料的初步解讀爲小銘缺乏「1 是由 100 個 0.01 所組成」概念，再經由稍後提出類似的問題「100 個 0.01 是多少？」得到證明。此外，研究者更尋求其他觀察者（如劉老師）的看法，進行三角校正（triangulation）以避免資料的詮釋流於偏見。例如對於資料的解讀，原本研究者認爲小銘具有「0.1 可分成 10 個 0.01」概念，但劉老師檢閱原案之後提出「小銘有可能尚未建立該概念」，建議研究者再以不同的問題（如 0.2 可分成幾個 0.01？）來檢驗之，而最後得到「小銘並未建立該概念」之結論。其他資料亦經由上述方式逐一校正，期望能使資料得到客觀且妥善的詮釋。

## 肆、研究結果

小銘在接受本研究訪談及教學時，已是國小六年級的學生。底下依照教學前、中、

後三個階段呈現本研究的結果。

## 一、教學前

小銘無法成功解小數化聚的問題

從教學前的訪談得知，小銘無法理解小數化聚的問題。例如，小銘雖然能答出0.6有「6」個0.1的化聚問題，但他是用0.6去乘以0.1（事實上應該是0.1去乘以未知數『6』等於0.6）來說明理由。研究者爲了提出類似問題以做持續比較，於是便把同樣的問題改成以0.2爲單位來考驗看看。結果，小銘的答案仍是「6個」0.2，並且仍試圖以0.6去乘以0.2來說明。可見，小銘無法理解一位小數與單位量之間的化聚問題。

另外，小銘雖然能回答「0.1可分成10個0.01」，但他無法進一步指出「0.2可分成幾個0.01？」，可見小銘也無法理解兩個單位量（十分位與百分位）之間的化聚問題。當然在面對二位小數與0.01之間的化聚以及一位小數與0.01之間的化聚等問題時，更不知要如何解決。

## 二、教學中

先建立0.1與橘色積木、0.01與白色積木之間的連結關係

要讓小銘能瞭解單位小數與數學積木的連結關係，研究者將透過藍色積木進行十等分割與一百等分割活動。雖然一開始藍色積木十等分割後，小銘無法發現每等份所對應的數值。但是，透過藍色積木與橘色積木之間的倍數關係的提示，分數是表示或記錄一個整體被等分割後被集聚的分量之說明，以及「1/10」與0.1的連結，小銘了解了「1/10」正是單位「1」被十等份後其中一等份的分量，「1個橘色積木是1/10，也是0.1」。

透過數學積木的表徵活動協助小銘解小數的化聚問題

小銘瞭解單位小數與數學積木的連結關係後，研究者接著透過橘色積木表徵活動來引導小銘解決一位小數與0.1的化聚問題（見原案1）。

89年11月4日　原案1

1363 師：（拿出1條橘色積木置於桌上）這1條橘色積木是多少？

1364 生：0.1。

1365 師：（再多放 1 條橘色積木）這樣 2 條呢？

1366 生：0.2。

1337 師：（再多放 1 條橘色積木）3 條呢？

1368 生：0.3。

1369 師：（再多放 1 條橘色積木）4 條是多少？

1370 生：0.4。

1371 師：爲什麼呢？

1372 生：就是說 1 條橘色積木是 0.1，這裡有 4 條，就等於 0.4 了。

1373 師：所以 0.1 的 4 倍是多少呢？

1374 生：0.4。

1375 師：我現在想要 0.6，請你拿給我好嗎？

1376 生：…..1，2，3，4，5，6（拿出 6 條橘色積木）剛好 0.6。

1377 師：說說看，爲什麼你會拿出 6 條橘色積木呢？

1378 生：就是這個（指著其中 1 條橘色積木）是 0.1 嘛，所以 6 個就是 0.6。

1379 師：請你數給我看，好不好？

1380 生：（指著 6 條橘色積木）0.1，0.2，……，0.5，0.6。

1381 師：很好…….所以 0.6 會有幾條橘色積木？

1382 生：有 6 個。

1383 師：那麼 0.6 有幾個 0.1 呢？

1384 生：6 個。

1385 師：0.6 是 0.1 的幾倍呢？

1386 生：6 倍啊！

1461 師：請問 0.8 有幾個 0.1 呢？

1462 生：0.1（指著橘色積木）有 8 個………8 個啊！

1463 師：如果 0.1 有 9 個的話是多少？

1464 生：…..0.9。

在原案 1 中，研究者對於以 0.1 爲單位的一位小數化聚問題，一開始先問小銘：「這 1 條橘色積木是多少呢？」，以確定他對於「1 條橘色積木代表 0.1」的認知已與研究者達成共識。然後，研究者才逐次增加橘色積木的個數，同時分別詢問其所代

表的數值。結果，小銘皆能順利地回答，反應大致上還算不錯。研究者在瞭解小銘對於一位小數的表徵能力沒有問題之後，便直接提問有關小數合成的問題。顯而易見的，小銘從剛剛所進行「4 條橘色積木等於 0.4」的表徵活動中，可以獲得「0.1 的 4 倍是 0.4」的正確答案。另一方面，針對有關小數分解的問題，小銘能夠拿出小數所對應的數學積木，例如 0.6 能拿出 6 條橘色積木，進而瞭解到 0.6 係可分解成 6 個 0.1 的道理。最後，小銘在檢驗的活動中，皆能順利地解決那些以 0.1 爲單位的一位小數化聚問題。

另外，針對二位小數與 0.01 的化聚問題，研究者是透過白色積木表徵活動來進行的(見原案 2)。

89 年 11 月 4 日　原案 2

1387 師：（拿出 1 個白色積木置於桌上）請問 1 個白色積木是多少？

1388 生：0.01 啊！

1389 師：（再多放 1 個白色積木）2 個呢？

1390 生：0.02。

1391 師：（再多放 1 個白色積木）這樣 3 個呢？

1392 生：0.03。

1393 師：說說看爲什麼 3 個白色積木會等於 0.03？

1394 生：因爲 0.01 乘以 3。

1395 師：你的 0.01 是怎樣來的呢？

1396 生：1 個白色積木不是等於 0.01 嗎？

1397 師：如果桌上有 13 個白色積木的話，這樣是多少？

1398 生：0.13。

1399 師：請問 13 個 0.01 是多少？

1400 生：0.13。

1401 師：接下來…我想要 0.05，請你現在拿給我好嗎？

1402 生：…..1，2，3，4，5（拿出 5 個白色積木）。

1403 師：爲什麼？

1404 生：因爲 0.01 乘以 5 嘛！

1405 師：那麼你有沒有發現 0.05 是 0.01 的幾倍呢？

1406 生：5 倍。

1469 師：你知道 0.52 是 0.01 的幾倍？

1470 生：知道，是 52 倍。

在原案 2 小銘沒有忘記之前所達成「1 個白色積木等於 0.01」的共識，故 3 個白色積木就等於 0.03。至於個數稍多的 13 個白色積木，他也能順利地說出其所代表的值。研究者在小銘有了達成 13 個白色積木與小數兩者對應關係的共識之後，接著提問：「13 個 0.01 是多少？」的合成問題，小銘則根據以上的結果：13 個白色積木爲 0.13 來解題。另外，小銘也懂得將 0.05 以 5 個白色積木來表示，進而推論出 0.05 是 0.01 的 5 倍。可見教學進行到這裡，他已學會了小數的分解問題。最後，研究者又以 0.52 等二位小數爲例子，進行持續比對。

至於一位小數與 0.01 之間的化聚問題，研究者也是透過白色積木表徵活動來進行的，例如原案 3：

89 年 11 月 4 日　原案 3

1407 師：（一次只拿出 1 個白色積木）請問這樣是多少？

1408 生：0.01，0.02，……..0.08，0.09（研究者一次拿出 1 個白色積木，直到桌上呈現 9 個白色積木）

1409 師：很好……….接下來我再加 1 個白色積木（桌上呈現 10 個白色積木），請問這樣是多少？

1410 生：零點零十。（正確讀法應爲零點一零）

1411 師：（指著 10 個白色積木）你看桌上的 10 個白色積木合起來會跟哪種積木一樣長？

1412 生：橘色積木。

1413 師：請問 1 條橘色積木是多少呢？

1414 生：0.1。

1415 師：那這 10 個白色積木是多少呢？

1416 生：…………..…啊！是 0.1。

1417 師：如果桌上有 20 個白色積木，那麼是多少？

1418 生：0.2。

1419 師：30 個白色積木呢？

1420 生：0.3。

1421 師：那麼 0.01 的 30 倍應該等於多少呢？

1422 生：也是 0.3。

1423 師：如果我現在想要 0.7，但是一定要用白色積木，請問要怎麼拿？

1424 生：…..0.7，這怎麼拿啊？….應該用橘色的吧！

1425 師：好吧！你先用橘色積木來拿 0.1。

1426 生：好…（從箱子裡拿出 1 條橘色積木）

1427 師：（指著 1 條橘色積木）請問這裡有幾個白色積木呢？

1428 生：10 個白色積木。

1429 師：所以 0.1 有幾個白色積木呢？請你拿給我看看。

1430 生：（拿出 10 個白色積木）…10 個。

1431 師：那 0.2 呢？

1432 生：（再拿出 10 個白色積木）…..20 個白色積木。

1433 師：0.3 呢？

1434 生：（再拿出 10 個白色積木）…..30 個。

1435 師：好，那麼你有沒有發現 0.7 到底要拿多少個白色積木呢？

1436 生：有…（每次拿出 10 個，總共拿出了 70 個白色積木）….70 個。

1437 師：你知道 0.7 有幾個 0.01 嗎？

1438 生：知道，是 70 個。

1439 師：請問 0.7 是 0.01 的幾倍呢？

1440 生：70 倍。

在原案 3 中，小銘從 1 個白色積木到 9 個白色積木，都能分別說出其所對應的小數值，但當積木的數目增加到 10 個時遇到困難。研究者接著提出「10 個白色積木合起來會跟哪種積木一樣長？」，讓他瞭解到 10 個白色積木的大小剛好跟 1 條橘色積木是一樣大的，也就是等於 0.1。而接著的 20 個白色積木是 0.2、30 個白色積木是 0.3，進而推論出「0.01 的 30 倍也是 0.3」。但是，研究者也發現小銘無法以白色積木來表示一位小數，例如在行 1424 中，小銘曾向研究者提出「0.7，這怎麼拿啊？….應該用橘色的吧」的質疑。於是研究者便順著他的說法，要求他先用橘色積木來表示 0.1。其間再透過橘色積木換成白色積木的方式，讓他發現 0.1 原來是可以 10 個白色積木

來表示，0.2 就有 20 個白色積木，底下以此類推。直到最後小銘能拿出 70 個白色積木來表示 0.7，繼而發現 0.7 係有 70 個 0.01。因此，儘管小銘在有些情況無法進行表徵活動，但經過指引之後，他還是能夠解決小數化聚的問題。

## 三、教學後

小銘已能解決小數的化聚問題

爲了檢驗教學成果，研究者安排一個半月後再一次進行訪談，此時不提供數學積木，只針對小數化聚問題進行提問。研究發現小銘能持續地解決化聚問題，限於篇幅，僅以原案 4、5 來說明教學效果。

90 年 1 月 3 日 原案 4

1657 師：你知道 0.62 有幾個 0.01 嗎？

1658 生：62 個。

1659 師：爲什麼呢？

1660 生：因爲 0.01 乘以 62 等於 0.62。

1661 師：請你計算看看，好不好？

1662 生：（該生在紙上計算，但是一直無法完成，大約經過 40 秒）…….反正算出來就是知道是 0.62 嘛！

1663 師：你能不能再想想看你是怎麼知道的呢？

1664 生：…………….（停頓 25 秒）嗯，0.62 不是有 62 個白色積木嗎？…..所以 0.62 有 62 個 0.01。

1665 師：好，我再問你一個問題，就是 0.98 是幾個 0.01 呢？

1666 生：98 個。

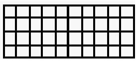
1667 師：你是怎麼知道的呢？

1668 生：因爲 0.01 要 98 個白色積木，就是 0.98。

在原案 4 中發現，小銘主要是透過白色積木來解決以 0.01 爲單位的二位小數化聚問題。從行 1660 到行 1662 中得知小銘知道 0.01 乘以 62 等於 0.62。而從行 1664，小銘瞭解以「0.62 有 62 個白色積木」來說明 0.62 有 62 個 0.01 的原因。而從行 1665 到行 1668 中，則是以 0.98 是幾個 0.01 爲例子進行持續比較，小銘懂得 0.01 可以 1 個白色積木來代替，0.98 就是「要 98 個白色積木」，故 0.98 是 98 個 0.01。因此，研究者認爲小銘已經具備解決二位小數與 0.01 化聚問題的能力。

90 年 1 月 3 日 原案 5

1675 師：請問 0.4 是幾個 0.01 組成的呢？

1676 生：…………（該生在紙上畫  ）這樣不是 0.4 嗎？……啊！我知道了，0.4 有 40 個 0.01。

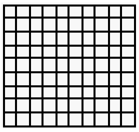
1677 師：那你怎麼知道 0.4 是 40 個 0.01 呢？

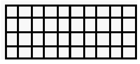
1678 生：（指著圖形）直接看這個圖….因爲這一小格不是代表 0.01 嗎？這一條不是代表 0.1 嗎？全部算起來是 0.4，全部有 40 個小格，所以 0.4 就是有 40 個 0.01。

1679 師：請問 90 個 0.01 是多少呢？

1680 生：……0.9。

1681 師：說說看你的理由。

1682 生：因爲….（在紙上畫  ）裡面不是有 90 個嗎？1 個小格是 0.01，一排則是 0.1，然後你算算看有 9 排就是 0.9 了。

在原案 5 中行 1676 可知，小銘係透過畫圖的方式，畫出了  的圖形用來當作是 0.4。由於小銘瞭解他所畫圖形中的每一個小格代表的是 0.01，並懂得以每一小格 0.01 爲基準量，數出 40 個小格，而順利地解決 0.4 有 40 個 0.01 的問題。接著，研究者又以其他的例子來對小銘進行持續比較，結果發現小銘皆能正確地回答。例如在行 1682 中，小銘以畫圖的方式來解釋爲何 90 個 0.01 等於 0.9，表示小銘具有解決以 0.01 爲單位之一位小數化聚問題的能力。

## 伍、結論與建議

### 一、結論

有關本研究結論的部分，研究者將從數學積木的分割活動、表徵活動實施的成效分別敘述之：

#### （一）透過數學積木的分割活動能幫助學童認識單位小數

本研究中的小銘在教學前對於單位小數欠缺應有的認識，並不曉得 0.1、0.01 所代表位值的大小。爲了克服這個問題，本研究特別以數學積木作爲小數符號的指示物。在藍色積木當作 1 的前提下，由於 1 塊藍色積木可以被分割成 10 條橘色積木或者 100 個白色積木的特性，幫助小銘曉得每 1 條橘色積木等於 1 的十分之一，即等於 0.1；每 1 個白色積木等於 1 的一百分之一，即

等於 0.01。

### （二）透過數學積木的表徵活動能幫助學童解決小數化聚問題

本研究結果指出，小銘在教學前無法正確地處理有關小數化聚的問題。然而，經由數學積木的協助下，小銘對於一位小數不僅懂得以橘色積木來表徵，更由於橘色積木可換成 10 個白色積木的特性，小銘也曉得一位小數可由白色積木來表徵。至於二位小數，小銘則藉由白色積木來表徵。總之，數學積木代表不同的單位量（橘色積木表示單位量 0.1、白色積木表示單位量 0.01），這樣的轉換正可以幫助小銘瞭解：不同單位量的小數化聚問題就是如何將小數改成以橘色積木或者白色積木來表徵的問題，同時也是探討數個橘色積木或者白色積木所代表的小數爲何的問題。本研究在施以一連串的表徵活動後，小銘對於處理一位或二位小數的化聚問題，皆能迎刃而解。即使經過一個月半之後，小銘仍能藉由小數表徵方式的轉換而正確地回答小數化聚問題。因此由以上的分析顯示，透過數學積木的表徵活動後，小銘在處理小數化聚問題的能力上有了顯著的進步。

## 二、建議

根據以上的結論，本研究擬針對有關小數概念的課程與教學方面提出建議，以提供課程編製與教師教學時的參考。最後則說明對未來研究的建議。

### （一）有關單位小數的認識，可從數學積木的教學作為起始活動

不管是一位、二位或三位小數的發展過程，單位小數在小數的認識上佔有一個極關鍵的角色。在小銘所上過的教材中，單位小數 0.1 的介紹是擺在數學課本第六冊（1998 改編本）第九單元中，單位小數 0.01 與 0.001 的介紹則擺在數學課本第七冊（1997 改編本）第七單元中。這些教材的編排上都有一項共同的特色就是單位小數都是由具體量的實測活動（容量、長度、重量）所引入的。不過，小銘在這些單位小數的認識上並不理想，研究者認爲這可能跟小銘仍無法體會出單位小數實際的大小有關。同時，「0.1」在數學課本第六冊時是以公升爲單位量水來引導的。然而到了數學課本第七冊時，「0.01」又改以 1 公尺等於 100 公分來引導，「0.001」則以 1 公里等於 1000 公尺、以及 1 公斤等於 1000 公克來引導。以上所述單位小數被引入的教學活動皆不一

致，有可能造成小銘學習上的困擾。爲了克服這個困難，本研究在引入單位小數 0.1、0.01（本研究對於 0.001 暫不考慮），統一提出 10 公分平方、高 1 公分的數學積木當作是 1，且由它引申出長 10 公分、高 1 公分的數學積木爲 0.1，以及 1 公分立方的數學積木爲 0.01。如此將數學積木融入認識單位小數的教材中，一方面可將單位小數的產生達成一致，使學童皆能從數學積木的分割動作得到單位小數，另一方面學童從觀察與操作中應比較容易獲得小數的概念。

**（二）在引入小數化聚問題之前，宜提供學童足夠的表徵活動機會以促使小數與數學積木產生連結**

本研究顯示，即使小數學習已學了快三年多的小銘，他對於小數化聚問題仍缺乏理解，研究者認爲這跟數學課程的設計有密切的關係。回顧小銘之前上過的數學課本第六冊第九單元爲例，雖然課本曾提供具體的表徵方式（如在水桶中裝水）來說明小數化聚的問題，但是卻少了「做做看」的步驟。例如，它只告訴學童「3 個 0.1 公升的水是 0.3 公升，所以 0.3 是有 3 個 0.1」，可是它並沒有要求學童實際地拿出 0.3 公升的水，讓學童能體會一下拿出 0.3 公升的水的拿法爲何。因此，研究者建議對於小數化聚問題課程，應該慎重考慮以學童是否易於理解的方式來呈現，即透過學童先表徵某個小數的要求，以體會出小數化聚的涵義。

**（三）對未來研究的建議**

（1）研究對象方面

本研究透過個案研究的方式，安排許多的數學積木活動，幫助一位國小六年級學童澄清小數的迷思概念。然而，學童小數概念的正式教學是安排於國小三、四年級階段，對於剛開始接觸小數的國小中年級學童，本研究的數學積木活動在小數的啓蒙教學上是否能依舊幫助他們學習？仍有待後續的探討。

（2）研究題材方面

本研究所探討的小數概念只包括一、二位小數之小數化聚的基本問題。然而，我國國小六年級學童已學到三位小數，且有關學童的小數概念上尚包含小數的被計數單位間的關係、小數多單位、小數大小比較、

小數與分數的轉換、等值小數、小數的稠密性、以及度量衡單位的小數換算等等。故未來研究可針對上述的內容繼續探討本研究之數學積木教學活動的成效。

（3）訪談情境的考慮

研究過後，作者省思本研究在訪談時，往往只問 0.62 是幾個 0.01 之類的問題，未考慮將問題置於問題情境中，如此去情境的（de-contextual）的訪談是否可靠？是否夠服人呢？這是下次研究應考慮與學習的。舉例來說，既然用數學積木教學，且發現有了教學成效，那麼教學後的檢驗是否可改用「數線座標」當作情境，請學生指出小數的正確位置，以檢驗教學活動的結果。

致謝：本研究的完成衷心感謝小銘的配合，也感謝匿名審查教授的寶貴意見。

# 參考文獻

艾如昀（1994）：**國小學生處理小數的歷程與困難**。國立中正大學心理研究所碩士論文，未出版。

吳昭容（1996）：**先前知識對國小學童小數概念學習之影響**。國立台灣大學博士論文，未出版。

杜建台（1996）：**國小中高年級學童「小數概念」理解之研究**。國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版。

張春興和林清山（1988）：**教育心理學**。台北：東華書局。

教育部（1993）：**國民小學課程標準**。台北：台捷。

吳芝儀和李奉儒（1995）：**質的評鑑與研究**（Patton, 1990：Qualitative evaluation and research methods）。台北：桂冠。

劉曼麗（1998）：**小數教材的處理**。論文發表於八十六學年度數學教育研討會。國立嘉義師範學院。

簡茂發和劉湘川（1993）：**八十一學年度國民教育階段學生基本學習成就評量國小組試題編製及抽測結果報告**。國立台中師範學院。

蔣治邦（1994）：由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。**國民小學數學科新課程概說（低年級）**。台北：台灣省國民教師研習會。

Bell, A., Swan, M. & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 399-420.

Carpenter, T. P., Corbitt, M K., Kepner, H. S. Jr., Lindquist, M. M. & Reys, R. E. (1981). Decimal: Result and implications from national assessment. *Arithmetic Teacher, 28*(4), 34-37.

D’Entremont, Y. M. (1991). *The reconstruction of decimal knowledge in young adult.* Unpublished doctoral dissertation University of Alberta.

Fischbein, E., Deri, M. Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(4), 3-17.

Grossman, A. S. (1983). Decimal notation: An important research finding. *Arithmetic*

*Teacher, 30*(9), 32-33.

Hiebert, J. (1984). Children’s mathematics learning: The struggle to link from and understanding. *The Elementary School Journal, 84*(5), 497-513.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics, 19,* 333-355.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1983). *Student’s conceptions of decimal number*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 230-415).

Hiebert, J. & Wearne, D. (1984). Decimal computation: A divorce between conceptual and procedural knowledge. In A. Bell, B. Low & J. Kilpatrick (Eds.), *Proceedings of the fifth international congress on mathematical education* (pp. 207-214). Adelaide, South Australia: PMENA.

Huinker, D. M. (1992). Research on calculators in mathematics education. In J. T. Fey & C. R. Hirsch (Eds.), *Decimals and Calculators Make Sense！*(pp56-64). Reston, VA: NCTM.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis, and remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz & M. G. Kantowski (Eds.), *Applied mathematical problem solving.* Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lesh, R. & Landau, M. (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes.* Orland, Florida: Academic Press.

Lichtenberg, B. K. & Lichtenberg, D. R. (1982). Decimals deserve distinction. In L. Silvey (Ed.), *Mathematics for the middle grades (5-9) 1982 yearbook*, Reston, Virginia.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Owens, D. T. & Super, D. B. (1993). Teaching and learning decimal fraction. In D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp.137-158).

Post, T. R., Behr, M. H. & Lesh, R. (1982). Interpretation of rational number concepts. In L. Silvey (Ed.), *Mathematics for the middle grades (5-9) 1982 yearbook* (pp.59-72). Reston, Virginia: NCTM.

Schoenfeld, A. H. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.225-264). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Spikell, M. A. (1993). *Teaching mathematics with manipulatives： A resource of activities for the k-12 teacher.* George Mason University.

Thipkong, S. (1988). *Preservice elementary teacher's misconceptions in interpreting units and solving multiplication and division decimal word problems.* Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia.

Wearne, D. (1990). Acquiring meaning for decimal fraction symbols: A one-year follow-up. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 545-564.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988a). Constructing and using meaning for mathematical symbols：the case of decimal fractions. In J. Hiebert & M. Beha (Eds.), *Number concept and operations in middle grade* (pp.220-235). Reston, VA: NCTM.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988b). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(5), 371-384.

# Overcoming a Sixth Grader's Misconception of Decimal Numbers by Using the Base Ten Blocks

Wei-Chou Huang[1], Shiang-tung Liu[2]

[1]Hu-Wei Elementary School , Yunlin
[2]Graduate Institute of Mathematics Education, National Chia-Yi University

## Abstract

This study was to explore the progression of overcoming a sixth grader decimal's misconception by using base-ten blocks. The case study method was conducted. The semi-structure questions were set before interviewed. The research subject is a sixth grader with the decimal misconceptions. Composing and decomposing problems were explored at this study. The teaching treatments included partition activities and representation activities. This study found that the subject has overcome his original misconception when he solved composing and decomposing problems.

Key words：Base ten blocks, Decimal's concept, Composing and Decomposing problems