創意教學
～分數的補救教學

洪素敏[1]　　楊德清[2]

[1]彰化縣萬興國小

[2]國立嘉義大學數學教育研究所

摘要

本文的主要目的乃是針對國小四年級學生在課室中解分數的相關問題時，往往會忽略單位量的重要性，以及將分數詞$\frac{a}{b}$的分子 a 和分母 b 當成無關的兩個整數之迷思概念做補救教學的活動。希望藉由本教學活動以幫助學生釐清觀念，為往後的分數概念學習奠定良好的基礎，同時可作為其他教師教學參考之用。

經過本補救教學活動以及教師巧妙地運用特殊技巧以引導兒童學習，學生在處理離散量分數概念之問題時，已知道必須考慮單位量，並對整體做分割，因此能求出該分數所代表的量，進而比較分數的大小。

關鍵詞：分數、補救教學、單位量

壹、前言

「分數」在數學課程中佔有極重要的角色。然而分數概念的學習，對兒童而言卻是最困難的部分(Southwell,1985)。許多有關分數的研究（呂玉琴，1991；林福來，黃敏晃，1993；楊德清，2000；Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984；Kerslake,1986；Rey & Yang,1998;Cramer, Post, & delMas, 2002;Kouba, Zawojewski, & Strutchens, 1997）結果顯示，兒童可以機械地操弄分數的計算，但往往是「知其然，而不知其所以然」。雖然可經由計算獲得正確的答案，但卻不瞭解所做爲何。例如：當要求小朋友算出 $24\times\frac{2}{4}$ 的答案爲多少並不困難，但是請兒童以這個算式舉一個文字題或是符合生活情境的例子，卻是相當困難的。

在日常生活中，我們有分東西的經驗，例如平分披薩；或是把一瓶汽水分成數杯，使大家都喝得一樣多……等，在分的過程中，往往會考慮到要如何分？可以分得多少？或是在測量物體的長度時會遭遇到所使用的單位度量並不能剛好量完的情形，諸如此類的問題都跟分數的概念有密切的關係。此外，在自然科的教材中，速率比、溶液濃度的關係等，也是分數很常用的重要概念。

然而，研究者在實際的教學經驗中常常發現，學生在學習分數部分課程時，會出現多樣錯誤及迷思概念，也就是學生並沒有在我們的教學過程中，真正理解分數的意義。例如：學生知道分數詞 $\frac{1}{8}$ 是平分成 8 等分取其中的 1 等分，但是問他們 24 個花片的 $\frac{1}{8}$ 是多少個？答案卻是 1 個或 8 個。而在離散量的問題情境中，兩個分數詞的比較大小，會出現將分子分母交叉相乘來判斷答案的現象，小朋友會被單位量的內容物個數所困擾，此乃緣由於兒童對分數的概念不求甚解之故。

本文的主要目的乃是針對國小四年級學生在學習分數的離散量問題情境時，無法理解分數是將所給定的單位量的內容物當成一個整體，去進行分割的活動，而得到該分數所代表的量，以及將分數詞 $\frac{a}{b}$ 的分子 a 和分母 b 當成無關的兩個整數之迷思概念做補救教學的活動。希望藉由本教學活動以幫助學生釐清觀念，爲往後的分數概念學習奠定良好的基礎，同時可作爲其他教師教學參考之用。

貳、兒童常見之分數迷思概念的探討

分析兒童常見之分數迷思概念的相關研究相當的多，以下僅針對與本補救教學有

關之分數迷思概念作探討：

一、忽略單位量

處理分數問題最重要的一個概念就是單位量的確認，但是學生在解題時，往往會有忽略單位量的情形發生，此種常見的迷思概念的成因乃是由於學生並未真正的了解分數的意義 (Cramer, Post, & delMas, 2002; Kouba, Zawojewski, & Strutchens, 1997)。例如：學生在回答一袋蘋果有 12 個，其中的一個是幾袋的問題時，會回答一個或是十二分之一個；或者是一打鉛筆有 12 枝時，學生會誤認爲 $\frac{1}{4}$ 打就是 4 枝鉛筆；$\frac{2}{4}$ 打就是 8 枝。這樣的反應顯示他們對於所給定的單位「袋」、「打」和單位分量「個」或「枝」之間的關係，並不清楚。常見之忽略單位量的迷思概念可分爲下列兩種：

1.受分子的影響：解題時只考慮到分子的因素，如果要此類學生在以二十四個組成一堆的花片中取出其中的六分之一時，他們的反應是只取其中的一個；取出六分之六時，他們會給你六個，雖然花片還有剩下，但他們也沒有警覺到奇怪。

2.受分母的影響：解題過程只考慮到問題中分母的因素。與上述受分子影響解題的情形類似，其中的差別只有在於，這類的學生是根據分母的大小來取花片。例如：一箱飲料有 24 罐時，$\frac{1}{4}$ 箱是 4 罐；$\frac{2}{4}$ 箱是 8 罐；$\frac{3}{4}$ 箱是 12 罐；$\frac{4}{4}$ 箱是 16 罐。因爲 4 個爲 1 份，$\frac{2}{4}$ 箱有 2 份，所以是 8 罐；$\frac{3}{4}$ 箱有 3 份，所以是 12 罐；$\frac{4}{4}$ 箱有 4 份，所以是 16 罐 (Mack, 1993)。

上述的迷思概念不論是受分子影響或是受分母影響，他們都忽視了所給定的單位量，究其主因乃是由於這些學生並未清楚的架構分數概念。

二、受整數基模的影響，視分數 $\frac{a}{b}$ 為兩個獨立個體

許多學生由於不瞭解分數的意義，因而受整數基模的影響，將分數 $\frac{a}{b}$ 視爲兩個獨立的個體。因此兒童在處理分數問題時會將 $\frac{a}{b}$ 視爲是由兩個整數所組成，而未將分數視爲一個數（楊德清，2000b；Behr, et al., 1984; Cramer, et a., 2002; Kerslake, 1986；Hart,1988; Post et al., 1992）。由於上述的迷思概念，導致兒童在進行與分數相關問題的解題活動時，如處理離散量之分數問題或比較分數大小時，便有相關之錯誤想法產生，分述如下：

1. 未將分子與分母作有意義的連結：Post 等(1984)與 Mack(1993)的研究發現學生將整數的觀念過度類推至分數的概念上，以至於未能將分子與分母作有意義的連結。例如：學生將 $\frac{3}{8}$ 中之分母 8 視爲 8 個物品組成一堆或一份，3 則視爲共

有 3 堆或 3 份，因此有 8×3=24 個物品。

2. 以分母爲準則之迷思概念：當比較分數大小時，忽略分子的存在，以分母的大小來決定分數的大小。例如比較$\frac{4}{8}$與$\frac{3}{5}$時，因爲 8＞5，所以$\frac{4}{8} > \frac{3}{5}$，並未考慮分子與分母的相互關係 (Behr et al.,1984; Hunting, 1986)。
3. 以分子爲度量分數大小之依據的迷思概念：當比較分數大小時，忽略分母的存在，以分子的大小來決定分數的大小。例如比較$\frac{4}{9}$與$\frac{8}{19}$時，忽略分母的存在，只因爲 4＜8，所以$\frac{4}{9} < \frac{8}{19}$ (Behr et al, 1984)。雖然此原則在分母相同之分數的情形下可適用[如$\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$，因爲 4＞3]，但是在分母不同或是等值分數的情形下，依此法則比較分數的大小，就會有錯誤的結果產生；例如學生會誤認爲$\frac{1}{5} < \frac{2}{10}$，因爲$\frac{2}{10}$是佔 2 等份，但是$\frac{1}{5}$只有佔一等份而已，所以$\frac{2}{10}$比較大（呂玉琴，1990）。
4. 以錯誤的方式考慮分子與分母：當比較分數大小時，知道必須同時考慮分子與分母，但是卻使用了不正確的概念。例如：比較$\frac{5}{8}$與$\frac{10}{16}$時，因爲 5＜10，而且 8＜16，所以$\frac{5}{8} < \frac{10}{16}$ (Behr et al., 1984; Hunting, 1986；楊德清，2000b)，此乃緣由於兒童對分數$\frac{a}{b}$的不瞭解。

上述分數迷思概念的根源，乃是由於兒童並未真正的釐清分數的內涵與意義，以及它與單位量的關係。

參、實施補救教學的活動流程

一、研究綜述

補救教學的對象爲班上四年級的學生，分成兩個階段選取。首先，在相關課程教學實施完畢，學校舉行定期評量後，對學生的數學試卷加以分析。本校四年級學生是使用國立編譯館的數學教科書，在下學期有關分數的課程是安排在第一、二、四及第七單元，前三個單元爲學校第一次定期評量的範圍，亦作爲本補救教學對象第一階段篩選的依據。在這三個單元中，學生所要達成的學習目標有：

a. 在「單位分數所指示的內容物爲單一個物」的情境下，解決同分母（＜＝100）真分數的合成分解問題。

b. 在「單位分數所指示的內容物爲多個個物」的情境下，將同分母（分母＜＝12）

分數的合成分解問題記錄成有分數的算式填充題，並解決問題。

經過試卷分析，篩選出在答題上顯現出具有分數迷思概念者 6 人作爲進行下一階段篩選的對象。第二階段則利用自己設計的學習單【如附件一】作爲診斷工具，以紙筆測驗並提供足量的花片，最後從中找出，即使輔以教具仍無法回答出正確答案的小朋友共 2 位（S1、S2），以此作爲實施補救教學的對象。

S1（女）：個性古靈精怪，會察言觀色，在班上的人緣不錯。對藝能科很有興趣，特別愛吹笛子，愛做小手工藝品；對學科則顯得興趣缺缺，上課會趁機玩耍或和同學聊天，作業會拖欠，但如果拋一個問題要她去思考，她會去嘗試。

S2（男）：個性活潑開朗，有些大而化之，不管是上課、下課都可以聽到他的聲音，是班上的「笑果」。上課很有參與感，愛發表高見、愛做些小動作引人注意，但常常偏離討論的主題，老師必須不斷地提示他回歸正題。

二、研究的信度與效度

質性研究中之行動研究，教學者即是研究者，研究者即是工具(Patton，1990，引自吳芝儀、李奉儒譯，1995；黃瑞琴，1991)。故本補救教學研究之信度與效度主要受教學者的蒐集資料之方法與技巧、信譽(誠實)、和哲學信念(吳芝儀、李奉儒譯，1995)所影響。因此作者嘗試從上述之角度分析本研究的信度與效度：

(1)資料蒐集之方法與技巧：補救教學進行之前，針對學生的迷思概念，設計教學活動單元，如何進行教學，與如何蒐集資料皆與一位數學教育專家及兩位具教學經驗的教師做深入的探討與準備。而資料的蒐集有教學活動進行中教師之觀察，工作單，與後測；分析方式包括了兩位作者與協助教師從不同的角度詮釋資料，故本研究已具三角校正(吳芝儀、李奉儒譯，1995)。

(2)研究者的信譽和哲學信念：研究者在教學的過程中，詳實的蒐集資料，客觀的呈現學生學習與表現的過程與成果。故研究者已客觀中性的報告結果。

同時本研究的研究工具，經由一位數學教育專家與兩位具教學經驗的教師審核，認定符合學生學習的範疇，故本研究工具具專家效度。

三、教學對象的迷思概念分析

S1 和 S2 經過診斷工具【如附件一】之再次檢定後，所具有之分數迷思概念分析如下：

1. S1、S2 兩者皆具有連續量的分數概念

S1、S2 兩位學生在回答第一題和第二題，分別在線段及長方形圖形中表示出分數詞時，皆可以提供正確答案，顯示他們對於連續量的分數概念沒有學習困難。

2. S1、S2 皆有忽略單位量之迷思概念

(1) S1 解題時明顯的「忽略單位量」之迷思概念：

S1 回答一箱飲料有 24 罐時，$\frac{1}{4}$箱是 1 罐；$\frac{2}{4}$箱是 2 罐；$\frac{3}{4}$箱是 3 罐；$\frac{4}{4}$箱是 1 箱，就是 24 罐。因爲$\frac{1}{4}$箱是 4 等分中拿走 1 份，所以是 1 罐；$\frac{2}{4}$箱是拿 2 份，所以是 2 罐；$\frac{3}{4}$箱是拿走 3 份，所以是 3 罐；而$\frac{4}{4}$箱就是全部了，因爲老師說過分子和分母一樣時，就是全部。

S1 忽略所給定的單位量，解題時只考慮到分子的因素，所以她以分子的數字爲答案。雖然在$\frac{4}{4}$箱時回答正確，但從她的解釋中可以發現，那是老師上課時不斷強調的結果。

(2) S2 不但有缺乏離散量之分數概念同時亦有「忽略單位量」之迷思概念

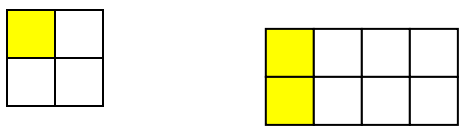
S2 回答一箱飲料有 24 罐時，$\frac{1}{4}$箱是 4 罐；$\frac{2}{4}$箱是 8 罐；$\frac{3}{4}$箱是 12 罐；$\frac{4}{4}$箱是 16 罐。因爲 4 個爲 1 份，$\frac{2}{4}$箱有 2 份，所以是 8 罐；$\frac{3}{4}$箱有 3 份，所以是 12 罐；$\frac{4}{4}$箱有 4 份，所以是 16 罐。

S2 受到整數基模的影響，把分數符號表徵$\frac{a}{b}$，視爲兩個獨立的整數組合，彼此之間不相關，並將之應用至分數的問題上。因此在解題時會出現，把分母 4 當成是 4 個一堆爲一份，分子的數字代表的是份數。此結果正與先前之研究結果相一致(楊德清, 2000；Behr, et al., 1984; Kerslake, 1986)。

3. S1、S2 皆缺乏比較異分子與分母之分數大小的能力

延續上題做分數詞的大小比較時，S1 回答：$\frac{2}{8}$箱比$\frac{1}{4}$箱多；$\frac{5}{12}$箱比$\frac{3}{8}$箱多。她以畫圖來解釋她的答案，圖示如下：

（a）

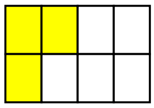


圖一（$\frac{1}{4}$） 圖二（$\frac{2}{8}$）

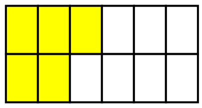
T：為什麼是 $\frac{2}{8}$ 箱比 $\frac{1}{4}$ 箱多呢?

S1：因為 $\frac{1}{4}$ 是 4 等份裡面的一等份，所以畫這樣（指著圖一）；$\frac{2}{8}$ 是 8 等份裡面的二等份，所以是這樣（指著圖二），把兩個重疊起來，這個比這個多（圖二之黃色部分比圖一之黃色部分多）。

（b）



圖三 （$\frac{3}{8}$）



圖四 （$\frac{5}{12}$）

T：為什麼 $\frac{5}{12}$ 箱比 $\frac{3}{8}$ 箱多呢?

S1：跟上面一樣啊，因為 $\frac{3}{8}$ 是 8 等份裡面的三等份，所以畫這樣（指著圖三）；$\frac{5}{12}$ 是 12 等份裡面的五等份，所以是這樣（指著圖四），把兩個疊起來，這個比這個多（圖四之黃色部分比圖三之黃色部分多）。

S1 雖以部分－整體的想法來作答，卻把它當成是連續量的問題情境，以長方形圖形代表全部，但是由於基準單位量沒有統一，所以重疊起來比較時，發生視覺上的誤判。

S2 在比較分數大小時，亦缺乏比較分數大小的能力：

S2：$\frac{2}{8}$ 箱比 $\frac{1}{4}$ 箱多；

T：為什麼是 $\frac{2}{8}$ 箱比 $\frac{1}{4}$ 箱多呢?

S2：因為 8+8 = 16，比 4 多；

…

S2：$\frac{5}{12}$ 箱比 $\frac{3}{8}$ 箱多。

T：為什麼是 $\frac{5}{12}$ 箱比 $\frac{3}{8}$ 箱多？

S2：因為 12 加 5 次是 60，8 加 3 次只有 24，所以 60 > 24。

S2 顯然把分數當成是兩個個別整數的組合，去進行兩個數的運算，完全缺乏分數的概念。

四、教學活動之進行過程

教學活動（一）

對 **S1** 的教學

教學目標：在離散量的問題情境中，學生能理解分數是將所給定的單位量的內容物當成一個整體，去進行分割的活動，而得到該分數所代表的量。

教師佈題：這裡有 24 個花片，我們把它當成是一箱飲料的 24 罐，現在請你用花片表示，給老師 $\frac{1}{4}$ 箱飲料。

S1：（**拿出** 1 **個花片表示答案**）**。**

T：**是** 1 **個？**

S1：**嗯。**

T：**你說說看，為什麼是** 1 **個？**

S1：**就是先分成** 4 **等份，再拿** 1 **等份。**

很明顯的，S1 解 $\frac{1}{4}$ 箱飲料時，並未考慮單位量爲何？仍將 1 視爲 $\frac{1}{4}$ 的單位量。此時教學者嘗試利用一張 A4 的白紙將 24 個花片蓋住，以引起 S1 之注意，並引導其進行思考。

T：**(把白紙蓋在** 24 **個花片上)現在白紙下有幾個花片？**

S1：24 **個。**

T：**我們現在把這一張白紙當成是這一箱飲料，再告訴我一次，怎麼給我** $\frac{1}{4}$ **箱飲料呢？**

S1：**就是先分成** 4 **等份，再拿** 1 **等份。**

T：**(把白紙拿開)請你做給我看。**

S1：**(充滿狐疑，不知如何下手。)**

教師嘗試引導 S1 注意覆蓋物有 24 個花片（即一箱 24 罐的飲料），但 S1 仍不知所措。此時教師乃引導學生如何將 A4 的白紙等分，以取出 $\frac{1}{4}$ 。

T：**(把白紙蓋上)再告訴我一次，怎麼給我** $\frac{1}{4}$ **箱飲料呢？**

S1：**先分成** 4 **等份，再拿** 1 **等份。**

T：**在白紙上表示給我看。**

S1：(把白紙拿起來，對摺成 4 等份，指著其中的 1 等份。)

T：(把白紙拿開)很好，現在用花片做做看。

S1：(S1 把花片分成 4 堆)【教師發現 S1 已瞭解到將花片 4 等份】

T：那麼$\frac{1}{4}$箱有幾罐飲料呢？

S1：（推出 1 堆）6 個。

經由 A4 紙的操作，引導 S1 瞭解$\frac{1}{4}$乃將白紙 4 等份取其中一等份，並將此概念連結至 24 個花片，如何做 4 等份再取其中一等份。此時可以發現 S1 已知如何將花片 4 等份取其中的一等份爲$\frac{1}{4}$ ，一等份即有 6 個花片。

T：那麼$\frac{2}{4}$箱有幾罐飲料呢？

S1：（再推出 1 堆）12 個。

T：那麼$\frac{3}{4}$箱有幾罐飲料呢？

S1：18 個。

T：所以$\frac{4}{4}$箱呢？

S1：24 個。

T：為什麼是 24 個？

S1：有 4 堆啊，六四二十四。

教師爲確認 S1 是真的理解，乃進一步追問$\frac{2}{4}$箱有幾罐飲料？$\frac{3}{4}$箱有幾罐飲料？$\frac{4}{4}$箱有幾罐飲料？結果發現 S1 的確知道$\frac{2}{4}$箱飲料乃是將單位量一箱 24 罐飲料 4 等份，並取其中的 2 等份，即爲$\frac{2}{4}$箱飲料，共有 8 罐飲料。而$\frac{3}{4}$箱亦是以相同的方法解題，很明顯地，S1 在處理離散量之分數問題時，已經能夠清楚地考慮單位量，並將其連結至離散量之分數以解決問題。

對 **S2** 的教學

教學目標：學生能理解分數詞$\frac{a}{b}$的分子 a 和分母 b 並不是無關的兩個整數，在離散量的問題情境中，要將所給定的單位量的內容物當成一個整體，去進行分割，而得到該分數所代表的量。

教師佈題：這裡有 24 個花片，我們把它當成是一箱飲料的 24 罐，現在請你用花片表示，給老師$\frac{1}{4}$箱飲料。

S2：（拿出 4 個花片）。

T：這是$\frac{1}{4}$箱飲料嗎？是幾罐？

S2：4 罐！

T：為什麼是 4 罐？

S2：因為 4 個為 1 份，所以有 4 罐。

T：那$\frac{2}{4}$箱呢？

S2：（拿出 4 個一堆的花片 2 堆）8 罐。

T：為什麼是 8 罐？

S2：有 2 份，所以是 8 罐

T：$\frac{3}{4}$箱呢？

S2：3 份啊，12 罐

T：$\frac{4}{4}$箱呢？

S2：（拿出 4 個一堆的花片 4 堆）16 罐。

T：為什麼？

S2：就有 4 份，所以是 16 罐。

S2 回答$\frac{1}{4}$箱飲料是 4 個爲一份，所以是 4 罐時，顯然是直接以分子、分母的數字去決定份數，並未考慮到單位量。經由$\frac{2}{4}$箱、$\frac{3}{4}$箱和$\frac{4}{4}$箱飲料的追問，更確定其忽視單位量，並深受整數基模影響的分數迷思概念。此時教學者嘗試以一張 A4 的白紙蓋住 24 個花片，引導其思考— 4 等分花片與四罐飲料的關係。

T：(把白紙蓋在 24 個花片上)老師把這一張白紙當成是一箱飲料，這一箱飲料底下有幾罐？

S2：24 罐。

T：現在請你說說看，要怎麼給我$\frac{1}{4}$箱飲料呢？

S2：就是 4 等份其中的 1 等份。

T：(把白紙拿開)請你做給我看。

S2：(每 4 個花片放一堆，共分成 6 堆。)

T：(把白紙蓋上)再告訴我一次，怎麼給我$\frac{1}{4}$箱飲料呢？

S2：就是先分成 4 等份裡面的 1 等份。

T：先分成 4 等份嗎？

S2：**對呀！**

S2 能正確的說出$\frac{1}{4}$箱飲料是 4 等份其中的一等份，但在實際的花片操作中仍把 4 個放一堆，總共有 6 堆，並未覺察到他實際上分成 6 等份而不是 4 等份。教學者再次把白紙蓋上，引導 S2 注意到分數等分概念、等分量之內的內含物個數、以及與單位量之間的關係。

T：**(把白紙拿開)那你這樣是幾等份呢？**

S2：6 **等份，咦？怎麼會這樣？**

T：**用花片做** 4 **等份給老師看。**

S2：**（做出了** 4 **等份。）**

T：**那麼** 1 **等份有幾個花片？**

S2：6 **個。**

T：**很好，那麼**$\frac{1}{4}$**箱飲料有幾罐？**

S2：6 **罐**

T：**那**$\frac{2}{4}$**箱呢？**

S2：12 **罐。**

T：**那**$\frac{3}{4}$**箱呢**

S2：18 **罐。**

T：$\frac{4}{4}$**箱呢？**

S2：24 **罐。**

T：**還有剩下嗎？**

S2：**嗯……沒有。**

T：**那**$\frac{4}{4}$**箱也可以說是幾箱？**

S2：1 **箱。**

S2 很驚訝地發現他的錯誤，同時在教師的引導下，能以花片正確地分成 4 等份，每一等份有 6 個花片，進而得到$\frac{1}{4}$箱飲料有 6 罐，而不是 4 罐。為了確知 S2 是否真的理解，教師繼續追問$\frac{2}{4}$箱、$\frac{3}{4}$箱和$\frac{4}{4}$箱飲料有幾罐，結果發現 S2 能正確回答，並理解$\frac{4}{4}$箱是 1 箱，即 24 罐飲料，沒有剩下了。

教學活動（二）

教學目標：在離散量的問題情境中，學生能對分數詞所描述的量，進行大小的比較。

準備教具：每人 24 個花片、真分數紙卡 16 張（分母均為 24 的因數）

教師佈題：24 個花片代表一箱飲料有 24 罐，你們都有一箱飲料，有 24 罐。每一張紙卡上面的分數詞代表是幾分之幾箱飲料。

a. 暖身活動：請 S1、S2 根據所抽出的分數卡，拿出其代表的花片量。在這個活動中，兩位小朋友都以等分花片的方式，正確的拿出花片的數量。例如 $\frac{2}{3}$，兩人都採取把手上的 24 個花片等分成 3 份，再拿出其中的 2 等份數出答案。

b. 活動開始：將所有的分數卡分成二堆（各 8 張），兩位小朋友各拿一堆，S1 所拿到的 8 張分數卡為 $\frac{2}{2}$、$\frac{7}{8}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{8}$；S2 所拿到的 8 張分數卡為 $\frac{4}{4}$、$\frac{6}{6}$、$\frac{8}{8}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{6}{12}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{11}{12}$，要人按照紙卡上的分數所描述的數量大小順序排列。

對 S1 的活動觀察

S1 一拿到分數卡就埋首分花片。由先前的經驗知道，如果藉由花片的操作她一定能知道答案，因此教學者決定拋問題給她，希望她能跳脫具體物的操作，改以抽象符號的表徵方式找出答案。

T：可不可以不要用花片，你想一想就知道怎樣比較這些分數卡？

S1：啊？不可以吧？（停頓，想了想）只有分子和分母一樣的時候可以。

T：什麼意思啊？

S1：像 $\frac{2}{2}$ 就不需要用到花片。

T：為什麼？

S1：那最簡單啊，不用算，就是全部。

由 S1 的回答可以發現，她知道分子和分母相同時是代表整體，也就是全部，所以可以不必透過具體物的操作就得到答案。但是教學者希望引導她從之前的實際經驗覺察到，她其實做的是分割的活動。

T：那其他的呢？一定要用花片來分才知道答案嗎？

S1：嗯（想了一下），是不是前面用乘的等於 24？【S1 曾在教學活動的進行過程中說過，$\frac{4}{4}$ 箱是 24 個花片，因為有 4 堆，六四二十四。】

T：**你說呢？**

S1：**我要用花片排排看。**

S1 先拿出$\frac{1}{3}$的分數卡，在紙上寫出 3×（ ）＝24【這是課本常出現的算式填充題的寫法】，( ) 裡填上 8，然後把 24 個花片分成 3 等份，數出一等份確實爲 8。再拿出$\frac{2}{3}$，在紙上寫下 8×2＝16，然後數兩等份的花片確定爲 16。又拿出$\frac{7}{8}$，寫 8×（ ）＝24，（ ）裡填 3，3×7＝（21），然後重新把 24 個花片合在一起，再等分成 8 等份，拿出 7 等份後一個一個點數，得到 21 個。如此一一檢驗她的想法，之後就直接用筆算，不需要再藉助花片來檢驗答案了。

S1 的排列結果如下：$\frac{2}{2}>\frac{7}{8}>\frac{3}{4}>\frac{2}{3}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\frac{1}{6}>\frac{1}{8}$

令人納悶的是，教學者再次引導她：$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{8}$這四個分數如果不要使用計算的方法，用想的，可不可以知道誰大誰小？她回答，應該不可以，一定要用算的，這點值得教學者再進一步深入探究。雖然四下仍未進行如何使用抽象符號以比較分數大小之教學，是否可由此介入以引導兒童不需藉助具體物的操作以進行分數大小之比較呢？值得進一步追蹤與研究。

對 S2 的活動觀察

S2 拿到分數卡是先進行分類，他把$\frac{4}{4}$、$\frac{6}{6}$、$\frac{8}{8}$先放在一起，其他的再用花片找出數量排序，包括$\frac{6}{12}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{1}{2}$這三個分數卡也是利用花片操作後，才決定其大小的。

S2 的排列結果如下：$\frac{4}{4}$、$\frac{6}{6}$、$\frac{8}{8}<\frac{1}{12}<\frac{6}{12}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{1}{2}<\frac{11}{12}$

這樣的結果有些出乎意料之外，於是有了以下的對話，

T：**你把**$\frac{4}{4}$、$\frac{6}{6}$、$\frac{8}{8}$**放在一起是表示什麼？**

S2：**這三個分數是一樣的，它們都是 1。**

T：**那它們是裡面最小的？**

S2：**對呀，你看我把花片都放在上面了，一看就知道誰多誰少。**

S2 在$\frac{4}{4}$、$\frac{6}{6}$、$\frac{8}{8}$三張紙卡上面放 1 個花片，其餘分數紙卡都擺上正確的花片數量，顯然他混淆了全部的 1 和 1 個花片了，於是教學者試著喚起他的學習經驗。

T：**那你再做一次**$\frac{8}{8}$**給我看。**

S2：還要做喔（嘴巴啐啐念，邊說邊做），就是把它分成 8 等份，再拿 8 等份，啊….不對、不對，我說的 1 是 1 箱，不是 1 個。

T：那你的 1 箱是幾個？

S2：24 個。

T：那到底誰最多呢？

S2：ㄟ…它們最多，應該這樣擺才對，這個要移過來（把$\frac{4}{4}$、$\frac{6}{6}$、$\frac{8}{8}$三張紙卡移到了$\frac{11}{12}$的前面，即$\frac{4}{4}$、$\frac{6}{6}$、$\frac{8}{8}$ > $\frac{11}{12}$ > $\frac{6}{12}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{1}{2}$ > $\frac{1}{12}$）。

在比較大小的活動中，再次檢驗了小朋友的分數概念。S2 雖然一開始誤解了整體的 1 所代表的意義，但能夠藉著具體活動警覺到自己的錯誤，顯示出他對分數有一定程度的瞭解，最後能順利完成比較大小的活動。

五、評量活動

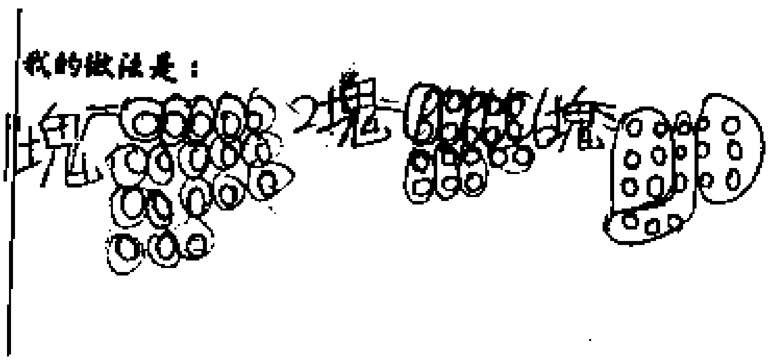
補救教學的實施是在定期評量後，利用中午時間進行，為期一週，因此在教學進度上尚未進入第七單元，有關在「單位分數所指示的內容物為多個個物」的情境下，將同分母（分母＜＝12）帶分數的合成分解問題的學習。

研究者為確認 S1 與 S2 已瞭解相關的分數概念，所以一星期後，以同類型的問題進行檢測，分析如下：

1. 學生處理離散量分數概念之問題時，已知道必須考慮單位量。

S1、S2 在回答：一包餅乾有 18 塊。$\frac{1}{18}$包、$\frac{1}{9}$包及$\frac{1}{3}$包各有幾塊餅乾的問題中，已能把 18 塊餅乾當成一個整體去進行分割（等分），S1 以乘法的方式計算 18×1＝18；9×2＝18；6×3＝18，所以得到答案分別為 1、2 和 6。

S2 用畫圈圈的方式去對 18 塊餅乾做分割，他的做法如下：

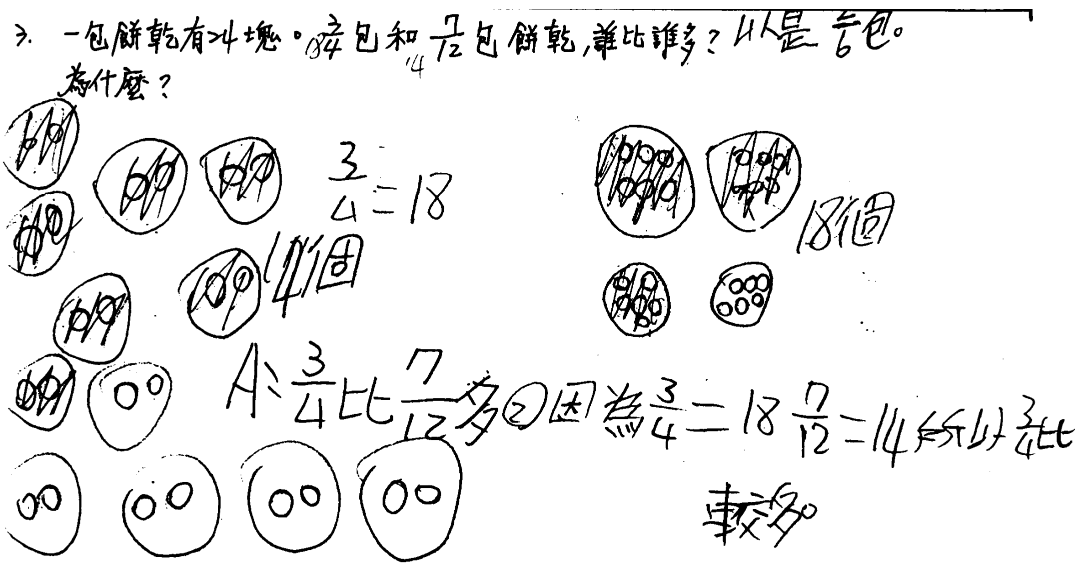


從兩位小朋友的解法中，我們看到了 S1 能跳脫（半）具體物的操作，改以抽象符號的表徵方式找出正確的答案；S2 則必須畫圈圈才能求得解答，途徑雖有不同，但卻是相同的概念。雖然以成人的眼光來看也許有優劣之分，但對兒童而言，他們是各自用了對自己有意義的方式來解題。

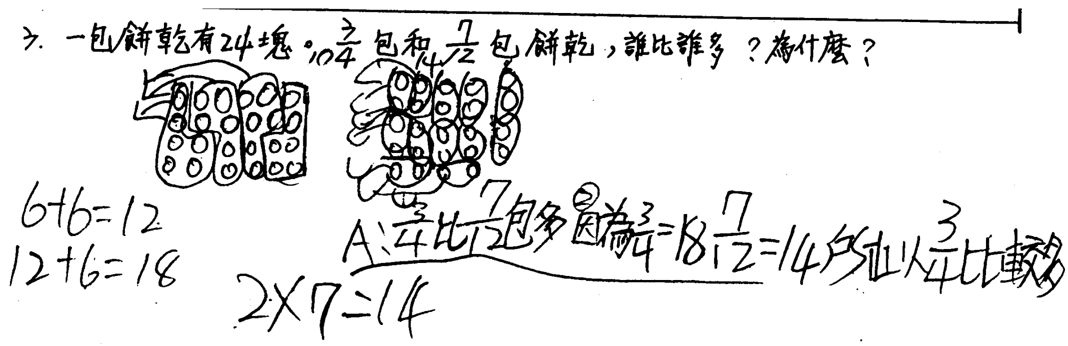
2. 學生已有比較分數大小的能力。

兩位小朋友在回答一包餅乾有 24 塊，$\frac{3}{4}$ 包和 $\frac{7}{12}$ 包誰比誰多的問題時，都以畫圓圈的方式去等分，再取出所要的份數，計算出數量來比較大小。

S1 的解題方法是：



S2 的解題方法是：



雖然學生有些不放心地跟我要花片去實際排排看，檢驗他們的想法，但令人欣慰的是，答案是正確的，他們的成就感也溢於言表。

肆、結論與啟示

一、結論

這個教學經驗給我很大的震撼。一張小小的白紙就幫助我去扭轉了小朋友的迷思概念，比我找方法在黑板上示範了 n 次的力量還要大，雖然只是江湖一點訣，但對於協助學習能力較差的兒童，卻有很大的幫助。

「分數」對學童來講是一種全新的經驗，就好像幼兒唱數詞一般，雖然可以念到 20 或 100，甚至以上的數字，可是未必瞭解數字所代表的意義。同樣地，學童會說真分數的分數詞是代表平分成幾等分之後，取其中的某一部份，可是卻無法進行實物的操作。可見當新概念引進來時，讓學童進行充分的具體物操作是不可少的工作（楊德清，2000a；Bezuk & Cramer, 1989; Post, Behr, & Lesh, 1982; Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1992; Ross & Kurtz，1993），此亦應證教育家杜威所說的〝做中學〞的道理。

教師的任務在於幫助學童能有意義及有效的學習，如果教師本身能清楚的了解學生的心理運作，對於教學策略的修正、補救教學的實施有相當大的幫助。因此，面對學童分數學習成效不彰的事實，教師應對學童分數迷思概念的特性、成因及類型都要作深入的了解，才能針對學童在分數學習上可能遭遇的困難加以防範，並對其所產生的錯誤加以診斷。

此外，由於分數意義及型態的多樣性及多變性，教師宜努力加強自身的分數知識

和分數教學知識，然後據以設計適當的教學方案，以提升學童的學習成效。

二、啟示

1.學生透過足夠的具體物操作活動，才能建構出對自己有意義的數學概念。

大部分的老師在教學上都會有一個疑惑：我明明講解得很清楚了，且一再地強調，爲什麼學生還是不懂？例如：老師們常說分子和分母相同時等於 1，其實這個 1 所代表的意義對學生來講並不那麼理所當然。

2.老師要掌握學生學習的契機。

雖說學生是自己學習的建構者，老師卻是關鍵角色的引導者，當學生有足夠的操作經驗後，教師應在適當的時機介入，以幫助學生統整想法，提升思考層次。

3.學生的分數迷思概念也許來自於老師的教學迷思。

從學生的反應得知，自己曾在上課中強調，〝因爲分子和分母一樣時，就是全部。〞也許，這只是個人一廂情願的說法，在分數的教學知識及學科知識上需要再琢磨。

參考文獻

支毅君（1995）：分數概念教學的省思：由個案談起。**國教之聲**，28（4），1-6。

王淵智（2001）：國小數學低成就學童分數表徵研究：以五個個案爲例。**國立嘉義大學數學教育研究所：革新國民中小學數學教育議題研討會**。

呂玉琴（1991）：國小學生的分數概念：1/2vs. 1/4。**國民教育**，31（11,12），10-21。

呂玉琴（1996）：國小教師的分數知識。**台北師院學報**，9，427-460。

呂玉琴（1998）：國小教師分數教學之相關知識研究。**台北師院學報**，11，393-438。

林福來、黃敏晃（1993）：分數啓蒙課程的分析、批判與辨證。**科學教育學刊**，1（1），1-27。

林碧珍（1990）：從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的分數概念。**新竹師院學報**，4，295-347。

吳芝儀、李奉儒(1995)譯 (M. Q. Patton 原著)：**質的研究與評鑑**。台北：桂冠。

黃瑞琴（1999）：**質的教育研究方法**。台北：心理。

楊德清（2000a）：數學教具與教學，**科學教育研究與發展季刊**，20，47-52。

楊德清（2000b）：國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法，**科學教育學刊**，8(4),379-394。

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 323-341.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, When, and How? In Paul R. Trafton and Albert B. Shult (Eds.), *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp. 156-167), 1989 Yearbook of NCTM, Reston, VA: NCTM.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education*, *33* (2), 111-144.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion, In J. Hibert & M. Behr, (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 198-279). Reston, VA: NCTM.

Hunting, R. P. (1986). Rachel's schemes for constructing fraction knowledge, *Educational Study in Mathematics*, *17* 49-66.

Kerslake, D. (1986). Fractions: *Children's strategies and errors: A report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project.* Windsor, England: NFER-Nelso.

Kouba, V., Zawojewski, J., & Strutchens, M. (1997). What do students know about numbers and operations? In P. A. Kenney & E. A. Silver, (Eds.), *Results from the sixth mathematics assessment of the National Assessment of Education Progress* (pp. 87-140). Reston, VA: NCTM.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. Carpenter, T., E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Research on the teaching, learning, and assessing of rational number concepts* (pp. 327-362). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Post, T. R., Behr, M. J., & Lesh, R. (1982). Interpretations of rational number. In L. Silver (Ed.), *Mathematics for the middle grades (5-9): 1982 Yearbook* (pp. 159-172). Reston, VA: NCTM.

Post, T. R., Cramer, K., Behr, M. J., & Lesh, R., Harel, G. (1992). Curricula implications of research on the teaching and learning of rational numbers concepts. In T. Carpenter, T.,

E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Research on the teaching, learning, and assessing of rational number concepts* (pp. 327-362). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Reys, R. E. & Yang, D. C. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan, *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 225-237.

Ross, R., & Kurtz, R. (1993). Making manipulatives work: A strategy for success, *Arithmetic Teacher*, 254-257.

Southwell, B. (1985). The development of rational number concepts in Papua, New Guinea. In A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.),*Theory, Research, and practice in mathematical education.* Nottingham,England: Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.

附件一：診斷工具

1. 請在下列的線段上，表示出 1/4，1/6 和 1/8。

（表示出 1/4）

（表示出 1/6）

（表示出 1/8）

2. 請在下列的長方形中，表示出 1/6 和 1/8。

（表示出 1/4）　（表示出 1/6）　（表示出 1/8）

3. 一箱飲料有 24 罐，爸爸買了 1/4 箱飲料，請問是買了幾罐飲料？2/4 箱，3/4

箱和 4/4 箱分別是幾罐？（請把你的做法和想法寫下來）

4. 一箱飲料有 24 罐，

(a)1/4 箱飲料和 2/8 箱飲料，誰比誰多？為什麼？

(b)3/8 箱飲料和 5/12 箱飲料，誰比誰多？為什麼？

Innovating Instruction
~ Remedial Teaching of Fractions

Su-Min Hung[1]　Der-Ching Yang[2]

[1]Wann Shing Public Elementary School, Changhua

[2]Graduate Institute of Mathematics Education, National Chiayi University

Abstract

The purpose of this study was to do the remedial teaching that focused on the fourth graders' fractional misconceptions in the researchers' class. These misconceptions included without consideration the importance of the unit when solving fractional problems and without making a reasonable relation between a and b for fraction $\frac{a}{b}$.

The results of this remedial teaching showed that students could consider the unit when solving fractional problems and make sense the meaning of fraction $\frac{a}{b}$ through skillful teaching to lead students learning the conceptions of fractions.

Key words:　Fraction, Remedial teaching, Unit.