職前教師回答數字常識問題所使用之解題策略的個案研究

王菱玉[1]　　　　　　楊德清[2]

[1]國立嘉義大學國民教育研究所

[2]國立嘉義大學數學教育研究所

（投稿日期：91 年 1 月 7 日；修正日期：91 年 2 月 22 日、4 月 11 日；接受日期：91 年 5 月 9 日）

摘要

本研究旨在探討職前教師解數字常識問題時所使用之解題策略，以瞭解職前教師在數學學科知識---數字常識上的表現。研究者參考文獻設計數字常識問題作爲研究工具，並以此工具訪談 2 位職前教師。

研究結果顯示受訪者 A 由於接受過數字常識相關知識的課程，因此在面對訪談問題時，能夠以數字常識方式解題。然而受訪者 B 則由於不具備數字常識的能力，以致於回答訪談問題時，其解題策略與思考模式皆侷限於傳統算則方式，而無法以有意義與有效率的方式解決問題。此結論證實了 Ma(1999)的研究結果，當我們想要改善學生的數學教育時，我們也必須去改善教師的數學知識。而且數字常識已被視爲小學數學教育的主要目標之一，因此，職前教師具備數字常識的能力是必須的。

關鍵字：職前教師、數字常識、解題策略

壹、前言

McIntosh, Reys, and Reys(1992)指出在紙筆計算上有良好表現的學生，其數字常識(Number Sense)的能力尚待進一步證實。而 Yang(1995)的研究則證實良好的計算能力，未必伴隨著數字常識的發展。Hiebert(1989)指出能促進數字常識的教學毫無疑問的是一種促進有意義數學學習的教學。顯示出數學的教學不應只是單向的教導、背誦，而是重視學生的學習成效、以及理解的一種有意義的教學，而數字常識的培養則是促成有意義學習的途徑之一。九年一貫即將全面推行，其精神強調生活化，培養學生帶的走的能力，注重學生的創造、思考、合理判斷、理性溝通等能力。數字常識的教學洽提供學生如此理解、思考、與創造的空間。

有關數字常識的研究發展相當蓬勃，從組成成分的發展（McIntosh, Reys & Reys, 1992; Resnick, 1989; Sowder & Schappelle, 1989; Sowder, 1992a ;Willis, 1990），至學生數字常識表現的研究（Howden, 1989;Reys, Reys, McIntosh, Emanuelsson, Johansson, &Yang, 1999;Reys & Yang,1998;楊德清，2000b），以及促進數字常識發展的教學策略研究（楊德清，2000c;Burton, 1993;Markovits & Sowder, 1994; Reys et al., 1991;Yang & Reys, 2001a, 2001b）。它們的共同點皆是以學生為研究中心，但關於職前教師數字常識的相關研究則闕如。

Reys（1994）指出教師不論在幫助兒童發展數字常識、教學實踐的推行、以及教學活動的選擇皆扮演一個極為重要的角色。而且唯有教師相信數字常識的學習較規則與算則的精通更為重要，數字常識對學生而言才會變的有價值、有意義（Reys, 1994）。在幾次針對職前教師非正式訪談中，發現即將成為正式教師的這群職前教師面對數字常識的數學問題時，多數仍習慣尋找紙筆以進行計算，若要求不要以紙筆來運算，很多人都會慌了陣腳。在解題策略方面有人用傳統算則來解題，而未就題目的意義加以判斷；有人則在沉思過後，給予不同的解題策略。面對與以往不同的問題，有人表現出較高的興趣，躍躍欲試；有人則缺乏自信。這些訪談的結果引起了研究者想針對職前教師的數字常識表現做探究。目前並無

Der-Ching Yang[1] 職前教師數字常識表現的全面性研究，多是針對估算做探討（梁崇惠，1994；孟憲騰，1998），另有針對大學生的估算策略的研究（Hanson & Hogan, 2000）。因此，本研究之研究目的乃以職前教師為對象，探討職前教師在數字常識問題所使用之解題策略，以瞭解職前教師數字常識的表現，期望能對數字常識的推展與教學有所助益。

欲探究的研究問題為：

1.職前教師回答數字常識問題時所使用之解題策略為何？

貳、研究背景

一、數字常識的意義與重要性

數字常識是一種對數字與運算的理解能力；包含了了解數與運算的特性，了解數字相對、絕對大小的意義，對誤差的容忍度，合理判斷的能力，以及使用不同策略進行運算的能力等內涵(楊德清，2000a，2000b；Case, 1989; Greeno,1991; McIntosh, Reys, & Reys, 1992; NCTM, 1989, 2000; Resnick, 1989; Reys, 1994; Sowder, 1992a, 1992b; Yang, 1995)。我們可以說，數字常識是個人對數字及運算之理解及妥善運用的程度，除了對數的基本了解外，也在於了解生活當中的數，以期對數與運算能有相當的了解、合理的判斷、適切的使用，以解決日常生活中含有數的相關情境的問題。

已往的數學教育較強調以算則的方式求出標準答案，因而容易阻礙學生的學習與思考，學生會因此誤解，將數學視為一連串的規則及程序、且須以記憶及練習的方式來學習；在這樣的教學下，學生通常關注解題的步驟而未將數學情境意義化，且會覺得無論是否理解求得正確答案才是最重要的（Burns,1994）。1930年代，Brownell 即關注有意義的學習；對 Brownell 而言，數學學習的測驗並非在測量學生數學的計算能力，而是了解數字關係的能力以及能以適當方式處理算術問題的能力(Reys, 1994)。顯示出數學的教學不應只是單向的教導、背誦，而是重視學生的學習過程、及理解的一種有意義的教學，而數字常識的培養則是促成有意義學習的途徑之一。為了幫助學生理解數學、意義化的學習，我們有必要

將數字常識融入原本的數學教學中。

二、數字常識的組成成分

研究者分析以下學者所提之理論架構(楊德清,2000a,2000b;Sowder,1992b; McIntosh et al.,1997; NCTM,1989,2000; Yang,1995),歸納出本研究的理論架構:

(一)理解並運用數字的基本意義、運算、以及各種表徵方式

NCTM 2000 年所出版的「數學原則與標準」中數與運算部分,明確指出期望學生能發展數字常識且能彈性的表徵及使用數字,並認爲教學的重點應使學生瞭解數字的基本意義、表徵方式並瞭解數與數字系統間的關係以及瞭解運算的意義。例如:小華班上共有 32 人,有 75% 的人有近視,進行計算時由於 75% $=\frac{3}{4}$,爲方便計算不用 75% 而用 $\frac{3}{4}$ 進行計算得結果爲 $32\times\frac{3}{4}=24$ 人患有近視。

(二)具比較數字大小的能力

數字大小的比較包含瞭解整數,分數,小數及它們之間的相對大小,如:知道 0.472>0.4007,能正確排序 0.2571、0.7522、1、$\frac{1}{4}$、$\frac{3}{4}$ 等數字,能瞭解 $\frac{2}{5}$ 及 $\frac{3}{5}$ 間有無限多個分數或小數。

(三)能妥善運用參考點以解決問題

參考點是一個可供參考、衡量的心理標準,用來估測或比較其它數字,通常用來判斷數字的大小或找出其近似值。例如:以身高爲參考點,以估計教室的高度、長度、及寬,進而估計教室體積的大小。

(四)能靈活的使用不同策略進行運算,並對運算的過程及結果進行意義化、合理化的判斷

教學的重點不在教會學生背會一堆公式來應付考試,數學的解題也絕不是一種公式的對號入坐,而是需對數字的基本意義及運算融會貫通,對題意有充分的瞭解,學校教導學生的應是解決問題的能力,使學生在面對問題情境時能選擇最適當的策略(如估算或心算)解決問題。以及對運算的過程進行反思,覺察自己

運算的步驟是否合理，並能對計算的結果賦予意義，即使計算過程就算則而言並沒有錯亦能發現結果合不合理，例如：小明今年 10 歲身高 100 公分，請問小明 20 歲時身高多少？學生以乘法解題得 100x2=200 公分時，會覺得不合理，發現這個解題策略在此是不適當的。

三、職前教師相關研究及教師角色

Ma(1999)表示教師數學學科知識的養成可分爲三個階段，首先，當教師仍是一個學生時主要是以培養數學能力爲主；其次，在師資培育階段他們所學的數學知識開始與教數學、學數學相連結；最後，在成爲正式的老師之後則是在增進學生數學能力的同時邊培養教師的數學學科知識。可知教師不是只學習如何教書，而應多關注學科知識。此外，瞭解學生的數學知識也是很重要的，國內學者鄧優君(1998)發現具有豐富的學科知識或學習者認知知識，且能在教學實踐上將其轉化爲實際教學的內容，同時並能考慮到學生可能的各種解題策略、學生的迷思概念，將使得教學更爲彈性並有效。

楊德清(2000c)對國小六年級學生所進行之一系列過程導向數字常識教學活動及相關之教學研究(Markovits & Sowder,1994; Yang & Reys, 2001a,2001b) 皆證實數字常識教學中教師扮演極爲重要之角色，教師必須深入的瞭解數字常識的內涵，並具有良好的教學技巧，方能讓數字常識的教學進行的更順暢、更有效率。

然而目前國內外並沒有專門針對職前教師所作的數字常識相關研究，只有針對估算所作的相關研究，梁崇惠(1994)針對 85 名職前教師進行估算策略測驗，並針對 13 名職前教師進行估算問題及對估算看法和態度的深度訪談。Hanson 及 Hogan(2000)針對 77 位大學生亦進行估算策略的研究。上述研究顯示，在面對估算問題，職前教師雖有能力進行估算，但卻未能加以判斷答案的合理性，或對計算結果進行補償作用加以調整答案；在大學生的部分也顯示出學生過於依賴工具、算則進行計算。

在強調將數字常識融入教學的同時，應注意到教學的另一個重要的角色「教師」。教師無論在教室環境中對兒童數字常識的發展、教學實踐的執行以及教學

活動的設計與選擇皆扮演一個極爲重要的角色（Reys, 1994; Yang & Reys, 2001a, 2001b）。在大力推動數字常識融入數學課程的同時，應重視教師在數字常識教學上所扮演的角色，不僅要讓教師瞭解何謂數字常識、數字常識的重要性、數字常識融入教學的精神、還要了解學生在數字常識的表現，而在努力讓學生具備數字常識能力的同時，即將進入學校爲人師表的職前教師們在數字常識能力的表現如何？相信對數字常識的教學扮演著重要的角色。若教師具備這樣的能力相信較能進行有意義的數學教學，並能幫助學生培養數字常識能力，然而，接受傳統算則訓練的職前教師們，是跳脫了原本的教育方式，培養了自己對數字及運算的數字常識能力？還是受傳統算則訓練窄化，正打算怎麼學怎麼教呢？基於此，瞭解職前教師數字常識能力及運用數字常識組成元素之能力，以作爲未來師資培育改進之參考，爲本研究欲進行探討之主要目的。

參、研究方法

本研究採用質性研究方法，以訪談的策略 (interview technique)進行研究，以數字常識組成成分爲理論架構設計訪談問題，以瞭解職前教師在數字常識上的表現及在數字常識問題的解題策略。

一、樣本

本研究以嘉義大學的職前教師爲主要研究參與者。由於質性研究注重深入、詳細的探討，因此樣本數通常很小(Bogden & Biklen, 1982)，本研究基於此考量以小樣本進行深度的訪談，期望能獲得深入、豐富的資料。本研究以便利抽樣的方式選取二位大學部的同學進行訪談，一位爲社教系四年級的學生，在本研究中的代號爲 A，一位爲幼教系四年級的學生，在本研究中的代號爲 B。

二、訪談工具

本研究以先前所歸納、分析的組成成分作爲本研究的理論架構，條列如下：

1. 瞭解並運用數字的基本意義、運算、以及各種表徵方式；

2. 具比較數字大小的能力；

3. 能妥善運用參考點進行計算；

4. 能靈活的使用不同策略進行運算，與判斷答案的合理性。

每個範疇設計三個問題，共 12 個問題，形成本研究之研究工具。本研究工具之效度採內容效度與專家效度。內容效度請熟悉數字常識之涵義與數學科有多年教學經驗之老師及嘉義大學研究數字常識領域的專家楊德清老師，就訪談工具的代表性與周延性加以檢視；專家效度則請嘉義大學楊德清教授就訪談工具內容之適切性加以審查。故本訪談工具兼具內容及專家效度。

三、資料蒐集與分析

本研究以研究者參考文獻所設計的數字常識問題爲研究工具，來探討職前教師的數字常識能力，爲得知研究參與者使用何種策略解題及面對數字常識問題的反應如何，因此選取深度訪談作爲蒐集資料的主要策略。每次訪談時間約 1 小時，訪談之初會先向研究參與者說明訪談動機與目的，澄清研究報告中將使用代號；訪談時會徵取受訪者的同意，進行錄音；訪談過程中則會盡量營造自在、輕鬆的訪談氣氛，並建立真誠、尊重、互信的關係。訪談結束後，先將錄音帶的內容轉譯成逐字稿，反覆閱讀逐字稿後，標示出重覆出現的字詞(words)、短語(phrases)、行爲組型(patterns of behavior)、解題策略或研究對象的思考方式(way of thinking)，然後寫下能表徵這些課題或組型的字詞或短語，發展編碼類別(coding categories)(Bogdan & Biklen, 1998/2001)。

肆、研究結果與討論

研究者依據訪談所得資料，經過反覆閱讀逐字稿後，將二位職前教師解題結果依對錯分類。每一**正確**之答案依其解釋之方式分類爲：

1.使用數字常識方法：解題方法運用數字常識的組成成份，如瞭解數字的意義，具比較數字大小的能力，運用參考點等，則歸類於此；

2.使用傳統算則方法：如果是利用傳統計算的方式求出答案，則歸類於此。

3.解釋不清楚：給予正確的答案，但無法解釋或解釋爲錯誤的則被歸類於此。

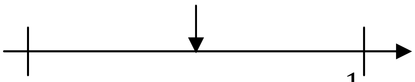
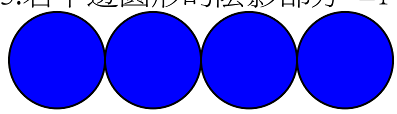
以下將依研究工具的四個向度分析二位職前教師的訪談結果：

一、數字與運算的基本意義及表徵方式

表 1 呈現職前教師回答數字基本意義、運算、各種表徵方式之訪談問題所使用的解題方法。受訪者 A 具使用數字與運算意義之策略，受訪者 B 則傾向於使用傳統算則的方法。分析如下：

表 1

職前教師回答數字基本意義、運算、各種表徵方式之訪談問題所使用的解題方法

訪談問題	解題型態	A	B
1.請在 □中填入(<、>、=)適當的答案： 174×10000÷9999 □174	* 大於 數字常識方法 傳統算則方法	 ○ 	 ○
2.下列哪一個數最能代表下圖中( )的值：  (1)0.005 (2) $\frac{1}{500}$ (3) 0.0005 (4) $\frac{5}{1000}$	(1)0.005 (2) $\frac{1}{500}$ * (3) 0.0005 數字常識方法 傳統算則方法	 ○	 ○
3.若下邊圓形的陰影部分 =1，  請畫出分別代表$\frac{1}{12}$ 及 $\frac{3}{8}$ 的圖形？	正確 數字常識方法 傳統算則方法 錯誤	 ○	 ○

“*”標示該題之正確答案。 “○”表示受訪者所使用的解題方法。

(一)問題 1

受訪者 A 能瞭解乘、除運算對數字的影響，運用：「**10000>9999，乘以大數除以小數，答案是大於。**」因此 A 的解題方式歸類爲數字常識方法。

受訪者 B 則是以心算先計算 174×10000 得 1740000，再以直式計算 1740000

÷9999，求得答案為 174 點多，為大於，過程如圖 4-1，由於是以傳統的紙筆計算方式求得答案，因此將受訪者 B 的解題方式歸類為傳統算則。

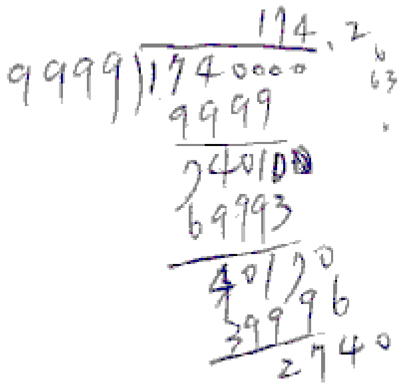


圖 4-1 受訪者 B 的解題方式

(二)問題 2

受訪者 A 把$\frac{1}{1000}$化成 0.001，0.001 的一半就是 0.0005；受訪者 B 則是把$\frac{1}{1000}\div 2=\frac{1}{2000}$再用直式除法換算得 0.0005。由於受訪者轉化原本的表徵方式再進行運算，因此，將之歸類於傳統算則方式。

(三)問題 3

問題 3 想探究受訪者分數的部分全體概念及單位分數的概念，瞭解受訪者是否能將四個圓看成 1。訪談結果顯示受訪者皆能有意義且合理的畫出整體的$\frac{1}{12}$及$\frac{3}{8}$，因此兩者的解題方式皆歸類為數字常識方式。不過受訪者 A、B 的回答方式卻有差異性：

A：…**全部是 1 嘛！$\frac{1}{12}$表示 12 份中的一份，就把全部分成 12 等份，也就是每個等份先略分為 3 份，再取其中一份。**

B：**因為四份等於 1 嘛，3×4＝12，也就是 12÷4＝3，就是每一個分成 3 份，每一小份就是$\frac{1}{12}$。**

由 A 的回答中可知 A 的分數部分全體概念較清楚，知道$\frac{1}{12}$表示 12 份中的一份，就把全部分成 12 等份，由於四個圓等於 1，因此每個等份先分為 3 份。而受訪

者 B 認爲：「因爲四份等於 1 嘛，3×4＝12，也就是 12÷4＝3」，顯示受訪者 B 的概念表達較不清楚，部分全體概念沒有詳細說明，而是在算怎麼劃分四個圓。

二、比較數字大小

表 2 呈現職前教師回答數字大小之訪談問題所使用的解題方法。受訪者 A 能運用比較數字大小之策略解決問題，受訪者 B 則傾向於使用傳統算則的方法。

表 2

職前教師回答數字大小之訪談問題所使用的解題方法

訪談問題	解題型態	A	B
4.請從下列數字選出兩個數字(不可重覆) 4、7、9、13、15 填入下邊的圖形中，使它成爲最接近 $\frac{1}{2}$ 分數，？ $\frac{\bigcirc}{\square}$	正確		
	數字常識方法	○	
	傳統算則方法		○
	錯誤		
5. 請問 $\frac{30}{31}$ 、 $\frac{36}{37}$ 兩個分數何者較接近 1？	$\frac{30}{31}$		
	* $\frac{36}{37}$		
	數字常識方法	○	
	傳統算則方法		
	解釋不清		○
6. 請由小到大排列下列數字： $\frac{13}{38}$ 、0.966、 $\frac{7}{29}$ 、0.4828、 $\frac{17}{16}$ 、 $\frac{8}{15}$ 。	排序正確		
	數字常識方法	○	
	傳統算則方法		○
	排序不正確		

(一)問題 4

受訪者 A 在回答問題 4 時能夠運用對數字之間相對大小的概念適當的選擇與判斷合理的答案，她認爲：

R：你剛剛 $\frac{7}{13}$ 跟 $\frac{7}{15}$ 是怎麼判斷的？

A：因爲跟 $\frac{1}{2}$ 比的話，這個多了 $\frac{0.5}{13}$ ，這個少了 $\frac{0.5}{15}$ ，看的是接近，所以多或少都沒關係，

只要看距離，那距離的話是$\frac{0.5}{15}$ 比較近，因爲相同的東西分給愈多人拿到的就愈少。

顯示，受訪者 A 能以意義化的方式解釋分數，合理性的判斷$\frac{7}{13}$ 跟$\frac{7}{15}$ 何者較接近$\frac{1}{2}$ ，因此，將其解題方式歸類爲數字常識方式。

受訪者 B 在嘗試過幾個解題方式失敗後，最後將$\frac{4}{9}$ 、$\frac{4}{7}$ 、$\frac{7}{13}$ 、$\frac{7}{15}$ 以直式除法化成分數再與 0.5 相減看哪個的差最小，找出答案，因此，將其解題方式歸類爲傳統算則方式。

(二)問題 5

在第 5 題爲分子分母皆差 1 之分數大小之比較，受訪者 A 表示：

A：這個就是 $1-\frac{1}{31}$ ，這個就是 $1-\frac{1}{37}$ ，分子相同，分母愈大，值就愈大，所以$\frac{1}{37} < \frac{1}{31}$ ，那看哪個差的最小就最接近，那它到 1 還要$\frac{1}{31}$ ，它到 1 只要$\frac{1}{37}$ ，那當然是它比較近，因爲它差的比較少，所以答案是$\frac{36}{37}$ 。

顯示受訪者非常瞭解單位分數的意義與重要，且瞭解分數的互補關係，因此將其解題方式歸類爲數字常識方法。

受訪者 B 雖也將 $1-\frac{30}{31}=\frac{1}{31}$ ，$1-\frac{36}{37}=\frac{1}{37}$ ，$\frac{1}{31}>\frac{1}{37}$ ，但卻無法合理且清楚的解釋爲何$\frac{30}{31}<\frac{36}{37}$ ？如：

R：那妳怎麼推論$\frac{1}{31}>\frac{1}{37} \Rightarrow \frac{30}{31}<\frac{36}{37}$ 。

B：因爲我用 1 去減的吧!我用 1 去減這個如果這個比這個大的話….其實相反的也可以說我可以用 $1-\frac{1}{31}=\frac{30}{31}$ ，然後既然$\frac{1}{31}>\frac{1}{37}$ 所以我應該可以說$\frac{30}{31}<\frac{36}{37}$ ，用減的話應該會相反吧，如果用數線畫的話$\frac{36}{37}$ 比較大所以會比較靠近 1。

根據受訪者前後的說法，顯示受訪者對於分數單位爲 1 的概念不是很清楚，只知道可以用 1 去減，運算後再比較大小，而比較大小時，對於如何由$\frac{1}{31}>\frac{1}{37}$ 推論

到$\frac{30}{31} < \frac{36}{37}$ 卻又無法很有邏輯的解釋清楚，因此，雖然答案正確但解釋不清。

(三)問題 6

問題 6 的排序，受訪者 A 回答如下：

A：**譬如說$\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$ 那 $\frac{13}{38}$ 38 比 40 小 13 又比 10 大，所以一定大於$\frac{1}{4}$；那$\frac{7}{29}$ 的話，因爲$\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$，29 比 28 大，分母比較大，所以$\frac{7}{29}<\frac{1}{4}$。**

很明顯受訪者 A 是以參考點的方式有意義的判斷每個分數的位置後，再排出大小，因此，將其解題方式歸類爲數字常識方式。

受訪者 B 則將$\frac{13}{38}$、$\frac{7}{29}$、$\frac{17}{16}$、$\frac{8}{15}$ 皆以直式除法化成小數後再與其他的分數比較大小(過程見圖 4-2)，且表示「我覺得要把這兩個小數化成分數的話好像比較複雜」，顯示受訪者所採取的策略就是以算則的方式，將題目皆化成一致的表徵後才能進行比較，因此，將其解題方式歸類爲傳統算則。

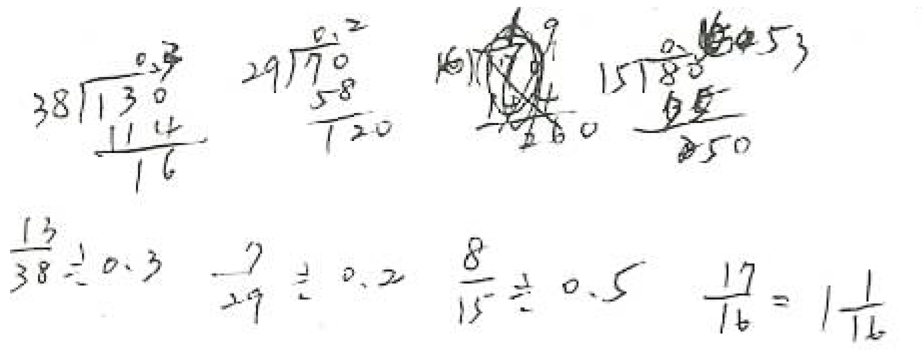


圖 4-2　受訪者 B 之解題方式

三、運用參考點之能力

表 3 呈現職前教師回答參考點之訪談問題所使用的解題方法。受訪者 A 能運用參考點之策略解決問題，受訪者 B 則傾向於使用傳統算則的方法。

表 3

<u>職前教師回答運用參考點之訪談問題所使用的解題方法</u>

訪談問題	解題型態	A	B
7. 請問下列分數中，哪一組分數之合大於 1？ (1) $\frac{3}{11}+\frac{29}{61}$ (2) $\frac{13}{21}+\frac{1}{2}$ (3) $\frac{13}{31}+\frac{4}{9}$ (4) $\frac{6}{17}+\frac{1}{2}$	(1) $\frac{3}{11}+\frac{29}{61}$ * (2) $\frac{13}{21}+\frac{1}{2}$ 數字常識方法 傳統算則方法 (3) $\frac{13}{31}+\frac{4}{9}$ (4) $\frac{6}{17}+\frac{1}{2}$	 ○	 ○
8. 小華用電子計算器計算 0.4975x9428.8 時，忘了按小數點，得以下結果 46908280，請幫小華補上小數點。	正確 數字常識方法 傳統算則方法 錯誤 數字常識方法 傳統算則方法	 ○	 ○
9. $\frac{17}{29}\times\frac{6}{13}$ 之積 (1)大於$\frac{1}{2}$ (2)等於 $\frac{1}{2}$ (3)小於$\frac{1}{2}$ (4)未經計算無法得知	(1) 大於$\frac{1}{2}$ (2) 等於 $\frac{1}{2}$ * (3)小於$\frac{1}{2}$ 數字常識方法 傳統算則方法 (4)未經計算無法得知	 ○	 ○

(一)問題 7

受訪者 A 運用$\frac{1}{2}$ 為參考點，而 B 以 0.5 為解題之依據，並依序檢驗每一個子項。兩者皆使用參考點的策略，因此將解題方式歸類為數字常識方法。

(二)問題 8

問題 8 欲探究受訪者是否能運用參考點合理估算、解釋答案，若受訪者能

以有意義的方式找出小數點則歸爲數字常識方式。若受訪者以數小數點方式而沒有以有意義的方式去思考 9000 多乘以一個約 0.5 的數，大約爲 4500 多，則歸類爲傳統算則方式。受訪者 A 的解題方式如下：

> **A**：•••（思考中）我剛剛有想到幾個想法，第一個是先去估，**9428.8** 大約是比較接近 **10000**，用 **10000** 去乘就是倒退四位【**46908280** 倒退四位】。第二個想法會想說假設如果他寫的這個值如果沒錯的話，就是說它後面已經沒有了，那以前有講過說小數點後面有幾位就是幾位，所以我會想說看數字後面的小數點，像這個有 **1**、**2**、**3**、**4**、**5**，**5** 位嘛！不過感覺好像不太對。那第三個就會把 **0.4975** 看成大約$\frac{1}{2}$，就是一半，就是 **9428.8** 的一半，約四千多。

顯示，受訪者能運用各種策略、並合理的判斷答案，因此將歸爲數字常識方法。

受訪者 B 則是以數小數點的方式找出答案，並表示「他們【指老師】好像說往這邊移、往那邊移，數幾位就是幾位，或補 0 嘛！好像只想到這個方法。」，由於是利用乘積的小數位數=乘數小數位數+被乘數小數位數的想法進行判斷，因此，將其解題方式歸類爲傳統算則。

（三）問題 9

受訪者 A 指出「$\frac{17}{29}$ 約爲$\frac{1}{2}$，$\frac{6}{13}$ 也是約爲$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$」，由於能運用參考點合理的判斷，因此將其解題方式歸類爲數字常識方式。

受訪者 B 則表示「因爲以前都一定要算對的嗎，那就直接乘吧!」於是將兩分數相乘，得$\frac{102}{377}$，但在解釋此數大於、等於、或小於$\frac{1}{2}$時卻出現迷思概念：

> **R**：你剛剛 102×2，377÷2，是想怎麼算？
>
> **B**：因爲$\frac{1}{2}$的話 **1** 是 **2** 的兩倍【講錯了】那 **102** 如果不是分母的兩倍的話…【解釋不出來】，用分母看好了，把分母除以 2 之後‧‧188 嘛，這樣它應該就是小於$\frac{1}{2}$吧!應該是這樣吧!假設 **1** 倍的話是 **102** 嘛，那它除以 **2** 是 **188**，**188** 比 **102** 還要大，所以是小於吧

而受訪者最後是將 102÷377，商數不到 0.5，得答案 3，顯示受訪者分數觀念不清，且是利用算則的方式找出答案，無法有意義的聯結數與數之間的關係，因此，將其解題方式歸類爲傳統算則。

四、估算策略

表 4 呈現職前教師回答估算之訪談問題所使用的方法。受訪者 A 能運用估算之策略解決問題，受訪者 B 則傾向於使用傳統算則的方法。

表 4

職前教師回答估算之訪談問題所使用的解題方法

訪談問題	解題型態	A	B
10. 請估算 61027÷33.275=？	* 接近之答案 大約估計 傳統算則方法 錯誤	 ○ 	 ○
11. 請估算 0.495+ $\frac{37}{18}$ +2.875- $\frac{27}{110}$ =？	* 接近之答案 大約估計 傳統算則方法 錯誤或使用紙筆計算	 ○ 	 ○
12. 請估算下列哪個選項之結果最接近 2500 (1)241+425+504+855 (2)41719.178 ÷ 19.295 (3)48.775×58.985 (4)623.97÷0.2499	(1)241+425+504+855 (2)41719.178÷19.295 (3)48.775×58.985 * (4)623.97÷0.2499 大約估計 傳統算則方法	 ○ 	 ○

(一)問題 10

受訪者 A 表示「**就 61027 約爲 60000，33.275 約爲 30，6000÷30=20000**」，於是很快的得到一個約略的估計值，因此將其解題方式歸類爲數字常識方式。

受訪者 B 則一字不變得採用直式除法求得 1834.02，問到是否有其他方式時則表示「這個式子可以化成分數吧!然後再約分，最後一樣是這兩個相除」，顯示受訪者不會運用估算策略，以計算的方式求答案，因此歸類爲傳統算則的方法。

(二)問題 11

受訪者 A 將 0.495 看成 0.5，$\frac{37}{18}$ 看成 2，$\frac{27}{110}$ 看成$\frac{1}{4}$ 即 0.25 得結果約 5，由

於是以估算策略求得答案，因此，將其解題方式歸類爲數字常識方式。

受訪者 B 則將小數改成分數的型式再進行運算，過程如圖 4-3：

$$\frac{495}{1000}+\frac{37}{18}+\frac{3825}{1000}-\frac{27}{110}=\frac{3370}{1000}+\frac{37}{18}-\frac{27}{110}$$

$$=3+\frac{37}{100}+\frac{37}{18}-\frac{27}{110}=3+2+\frac{1}{18}-\frac{27}{110}=5+\frac{110-486}{1980}$$

$$=4\frac{604}{1980}=4\frac{151}{495}$$

<u>圖 4-3</u> 受訪者 B 之解題方式

由於是以算則方式一步步的計算求得答案，因此將之歸類爲傳統算則。

(三)問題 12

受訪者 A 的回答如下：

A：**沒有啊！就是大概估一下。像這個就 40000÷20＝2000…**

R：**那第一個呢？**

A：**這個就拉一下把它湊成 1000，這兩個比較接近 1000 不過多了 100，那這兩個的話大概 979，兩邊相抵的話大約就是 2000 嘛！那第三個就大約 50×60＝3000。第四個除以** $\frac{1}{4}$ **，就是乘以 4 嘛，623×4 就是最接近的。**

可知受訪者 A 將四個選項大約估算過後，得第四個爲最接近 2500，由於妥善使用估算策略因此將其解題方式歸類爲數字常識方式。

受訪者 B 在第一個選項部分將四個數以直式加法加起來得和 2025，第三個選項以直式算則求 48×58 得乘積 2784，第二及第四個選項則先以 2500 乘以除數再減去被除數，結果再做比較；這樣的運算過程想法雖然沒錯，但受訪者自己卻對自己的計算方式解釋不清：

B：**這個【41719.178÷19.295】我是想說就後面這個去掉用 19 去乘於 2500 就會有一個數嘛! 用這個數減掉原來的數【41719.178】就會得到一個數，這個數就表示它沒有接近….就是…它算出來不是 2500，是比 2500 小的數，算出來是 2 嘛！就是表示它大概比 2500 少 2 就是約 2498。然後這個【623.97÷0.2499】也是跟這個算法一樣，算出來也是少…ㄝ，這是多，算出來大概 0.1，就是多大概 1 倍吧！因爲我是用 2500 爲基準，算出來是多 1 或少 2，基本上就是它接近的值，所以多 1 的應該是比少 2 的更接近**

由於是使用算則的方式試圖拼湊出答案，因此，將之歸類爲傳統算則。

五、整體表現

表五呈現的是受訪者 A、B 回答訪談問題之整體表現。整體而言，受訪者 A 在回答訪談問題時，能夠以數字常識之策略回答問題。12 個問題中 A 有 11 題採用數字常識之方法解題，只有 1 題是運用了傳統算則之方式；然而受訪者 B 只有 2 題是運用數字常識策略，8 題使用了傳統算則之方式。顯示兩者所用之解題方式差異甚大，究其原因乃是由於 A 已接受過數字常識相關課程之洗禮，而 B 則未曾參與過數字常識課程之教學，因此有如此之差異。

表五

解題策略之整體表現

		A	B
正確	數字常識方法	11	2
	傳統算則方法	1	8
	解釋不清	0	1
不正確	傳統算則方法	0	1

研究者並進一步深入瞭解受訪者 A、B 的想法，以探究其不同處。A 認爲：

R：今天的題目會很難嗎？

A：還好，反正又不是要我真正算，可以用判斷的。可是，其實以前國小算的制式化題目太多了，那像我之前上過楊老師【楊德清老師】的數學科教材教法，就開始會想說用估的去算，在上老師的課之前，遇到這種題目直覺還是會用算的。

R：那像這邊的題目有的是較開放式的讓你算，有的是選擇題，在還沒上過楊老師的課之前你都會直接去算嗎？

A：以前喔！應該是吧，像這種開放式的沒得參考，就只好去算。

R：那你是因爲上過楊老師的課....

A：對啊！就會覺得解數學問題也不一定要用傳統算則的方式。

由上述的訪談中可以發現由於受訪者接受過數字常識的教學，影響了他解數學問題的解題策略。由於受訪者瞭解除了算則外，還有很多有意義的方法可幫助我們解決數學問題。因此面對數學問題時，他可以先瞭解題意，思考解題策略，並以

有意義、有效率的方式解決問題。

受訪者 B 在面對數學問題時，雖然表示不喜歡計算，覺得常會計算錯誤，但卻無法脫離算則的限制中，幾乎都是使用傳統的計算方式，解題中甚至努力去回想，老師從前是怎麼教的，有沒有一些小技巧可以使用，以簡化計算，卻沒有思考如何以有效率、有意義的方式解決問題。例如：

B：因爲以前都一定要算對的嗎，那就直接乘吧!

.【中間部分對話省略】

R：沒關係，那你還有想到其他方法嗎？

B：•••好像沒有，我在想老師教過的一些方法，不過好像沒有…

.【中間部分對話省略】

R：數小數點的話是以前老師教的嗎。

B：對啊！他們好像說往這邊移、往那邊移，數幾位就是幾位，或補 **0** 嘛！只想到這個方法。

顯示，受訪者 B 受到傳統算則的影響，限制了他在解題的思考與理解。然而，面對某些數學問題時，基本概念亦不是很清楚，在解題的過程中，似乎試圖用一推計算把答案求出來，卻往往是徒勞無功。顯示受訪者具有迷思概念，只是在操弄算則，試圖求出一個在選項中有的答案，有時連自己在算什麼都搞不太清楚。整題而言，受訪者 B 在面對數學問題時顯然無法跳脫傳統算則的解題方式。

伍、結論與建議

一、結論

由於只針對兩位受訪者進行訪談，基於此限制，本研究並不期望對所有的職前教師做一推論，而盡量就兩位受訪者的訪談結果提供職前教師在教學上一些建議，期望有助數字常識教學的推廣。根據研究結果提出以下兩點結論：

1. 不瞭解數字常識容易侷限於傳統算則：

受訪者 B 由於未接受過數字常識教學，並不瞭解數字常識，從其解題過程可以發現，她的思考模式皆侷限於傳統算則的方式，無法跳脫冗長計算的藩籬。當遇上繁雜的計算時，猶如身陷泥淖中，無法有效率、有意義的解決問題。此正

失去了學習數學的真正精神。

2.數字常識的瞭解有助意義化的解題

受訪者 A 由於有接受過數字常識的課程，因此能運用參考點、估算進行有意義的解題，且能彈性的運用策略進行解題、比較大小。此正證實了 Ma(1999)的主張，當我們想要改善學生的數學教育時，我們也必需去改善教師的數學知識。因爲，教師若沒有專業的數學素養如何能幫助兒童發展有意義的學習？而由於教學品質是隨著教師對教材瞭解的深度而有變化，教師常因爲對學科的瞭解不夠，而使他們無法對學生解釋重要概念(簡紅珠，1996)；再加上訪談結果顯示，並非所有的職前教師都具備數字常識能力，而有接受過數字常識課程的職前教師，較能運用數字常識特性進行運算，可見職前教師接受數字常識的課程培育是有必要的。

二、建議

根據研究結果提出以下之建議---培養教師的數字常識能力有助提昇數字常識教學的品質。數字常識融入教學的重要性是受肯定的(Markovits & Sowder, 1994; Yang & Reys, 2001a, 2001b)，而教師角色的重要性就如同 Reys（1994）所指出的「教師無論在教室環境中數字常識的發展、教學實踐的推行以及教學活動的選擇皆扮演一個極爲重要的角色」。然而在傳統算則、制式化教學的影響下，即使是即將踏入學校教書的職前教師，也有看到四則運算就開始計算，而沒有具備數字常識能力。教師的學科知識日益受重視，在要教學生之前教師除了一般教學知識，更應具備學科知識。學科知識是教學的先備條件，教學的許多工作，例如選擇有價値的學習活動、提供解釋、提出有創意的問題、評鑑學生的學習…等，都仰賴教師對學科的理解(簡紅珠，1996)，可知職前教師充實學科知識有其必要性，訪談結果顯示由於受訪者 A 有接觸過數字常識的課程，在回答數字常識問題時不僅較能運用數字常識特性進行運算且較能靈活運用策略解題。在提倡將數字常識融入課程之前，應多舉辦相關的師資培育課程，讓職前教師瞭解何謂數字常識？並培養教師的數字常識能力。因此，教師若具有數字常識能力，相信在教

學時較能以自身的數學學習經驗，幫助學生培養數字常識，且較能提高教學品質。

參考文獻

孟憲騰(1998)：**職前教師估算策略及估算教學態度之研究－以台東師範學院為例**。國立台東師範學院教育研究所碩士論文。

梁崇惠(1994)：**職前教師估算策略之研究**。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文。

楊德清（2000a）：數字常識與筆算能力，**教師之友**，41.2，30-35。

楊德清（2000b）：國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法，**科學教育學刊**，8(4),379-394。

楊德清(2000c)：從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識能力，**國科會89年度補助研究計劃**。(NSC 89-2511-S-415-001)

簡紅珠(1996)：**師院學生對國小數學的學科知識之研究**。新竹師院國民教育研究所論文集，第 2 集，1-33 頁。

鄧優君(1998)：**師院實習生數學教學實踐之反省與成長**。國立嘉義師範學院碩士論文。

Bogdan, R. C., & Biklen, S.K. (2001)：**質性教育研究**(李奉儒等譯)。嘉義：濤石。(原著出版於 1998 年)

Bogdan, R. C., & Biklen, S.K. (1982). *Qualitative research for education：An introduction to theory and methods.* Boston：Allyn and Bacon.

Burton, G.. (1993). *Number Sense and Operations*. Reston, VA: NCTM.

Burns, M. (1994). Arithmetic: The Last holdout. *Phi Delta Kappen*, (Feb.), 471-476.

Case, R. (1989). Fostering the development of children's number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp.57-64). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 170-218.

Hanson, S.A. & Hogan, T.P.(2000). Computional Estimation Skill of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.31, No.4, 483-499.

Hiebert, J. (1989). Reflections after the conference on number sense. In J.T. Sowder & B.P.Schappelle (Eds). *Establishing Foundations for Research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp.82-84). San Diego: San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.

Howden, H. (1989). Teaching Number sense. *Arithmetic Teacher*, 36: 6-11.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Markovits, Z. & Sowder J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25(1), 4-29.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining Basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.

McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E., Bana, J., Farrell, B. (1997). *Number Sense in School Mathematics: Student Performance in Four Countries.* Mathematics, Science, & Technology Education Center, Edith Cowan University.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Resnick, L.B.(1989). Defining, assessing and teaching number sense. In Sowder & Schappelle(Eds.), *Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of a Conference.* San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in middle grades. *Teaching Mathematics in the Middle School, 1*(2), 114-120.

Reys, B. J., Barger, R., Dougherty, B., Hope, J., Markovits, Z., Parnas, A., Reehm, S., Sturdevant, R., Weber, M., & Bruckheimer, M. (1991). *Developing Number Sense in the Middle Grades*, Reston, VA: NCTM.

Reys, R. E., Reys, B. J., McIntosh, A., Emanuelsson G., Johansson, B., & Yang, D. C. (1999). Assessing Number Sense of Students in Australia, Sweden, Taiwan and the United States. *School Science and Mathematics*, 99(2), 61-70.

Reys, R. E. & Yang, D. C. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan, *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 225-237.

Sowder, J. (1992a). Estimation and number sense, in D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan

Sowder, J. (1992b). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R. & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sowder, J. T. & Schappelle, B. P. (Eds.) (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference*. San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Willis, S.(ED).(1990).*Being Numerate: What Counts?* Hawthorn, Victoria: Australian Council for Educational Research.

Yang, D. C. (1995). *Number sense performance and strategies possessed by sixth and eighth grade students in Taiwan.* Doctoral dissertation, University of Missouri: Columbia, Dissertation Abstracts Iternational, 57, 3865A.

Yang, D.C., & Reys, E.(2001a). Developing Number Sense. *Mathematics Teaching*, *176*,39-41.　(NSC 89-2511-S-415-001)

Yang, D.C., & Reys, E.(2001b).One Fraction Problem: Many Solution Paths. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *7*(3), 164-166.　(NSC 89-2511-S-415-001)

A Case Study of Problem-Solving Strategies Used by Pre-service Teacher When Responding to Number Sense Problems

Ling-Yu Wang[1] Der-Ching Yang[2]

[1]Graduate School of Elementary and Secondary Education, National Chiayi University
[2]Graduate Institute of Mathematics Education, National Chiayi University

Abstract

The purpose of this study was to investigate the problem-solving strategies used by pre-service teacher when responding to number sense problems. Researcher designs twelve number sense problems consulting relative literature as research instruments and interviews two pre-service teachers.

The interview results indicated that one pre-service teacher could use number sense strategies to solve these problems due to she had taken number sense related course. However, the strategy and thinking processes of second pre-service teacher was limited to using standard written algorithms without understanding number sense. This result confirms the statement of Ma (1999) "while we want to work on improving students' mathematics education, we also need to improve their teachers' knowledge of school mathematics" (p.144). Since the teaching and learning number sense has been considered to be an important topic in the elementary school education, the teacher need to have profound understanding on number sense.

Key words: Pre-service teacher, Number Sense, Problem-solving strategies.