

數學探究教學對數學解題能力提升 之個案研究

秦爾聰¹ 林勇吉^{1*} 林晶珮² 段曉林¹

¹國立彰化師範大學 科學教育研究所

²南投縣立水里國民中學

* b8524039@gmail.com

(投稿日期：2009.7.15；修正日期：2009.8.18，2009.9.22；接受日期：2009.10.26)

摘 要

本研究旨在探討數學探究教學如何提升學生數學解題能力，透過個案研究的設計，以四位不同數學成就的七年級學生為研究對象，其中高成就與低成就各一位、中成就兩位；主要透過「任務為基礎的訪談」(task-based interview)，輔以「課室觀察」、「學習日誌」與「教學日誌」進行資料的收集。研究結果發現高成就學生因為其他同學優異的探究表現，促使她改變解題信念，提升「回顧問題」的能力；其中一位中成就學生透過探究教學中的自主探索與接受同學挑戰，展露更佳的「瞭解問題」與「回顧問題」能力；另外一位中成就學生，利用探究教學中解釋自己與組員想法的機會，提升「解決問題」與「回顧問題」能力；低成就學生則是在探究教學中，藉由其他同學的畫圖解題方式得以提升個人整體的解題能力。

關鍵字：個案研究、解題能力、數學探究

壹、前言

自「九年一貫課程改革」推行以來，國民中、小學數學教育開啟一個嶄新視野，強調以「學習者為主體，以知識的完整面為教育的主軸」（教育部，2003，頁19），此理念與當今數學教育改革之趨勢一致（如 National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）。隨著這波改革，教學不能再停留於過往的講述式教學，必須轉而協助學生成為「獨立的學習者」（Feiman-Nemser, 2001）。「數學探究教學」（mathematics inquiry teaching）（或稱探究教學）便據此油然而生，因為在數學探究教學中，教師必須幫助學生藉由「臆測」（conjecture）、「推理」（reasoning）、「論證」（arguments）、「討論」、「解釋」等「思考數學」的行為，主動參與建構知識的過程，這將有助學生成為獨立的學習者（Brown, Wilson, & Fitzallen, 2007）。

另外一方面，長久以來「數學解題」都是數學教育工作者關注的焦點（如 Polya, 1945）。對學生而言，解題不僅是學習數學的目標，也是學習數學的主要手段（NCTM, 2000），因此發展「數學解題能力」，直接影響學生的數學學習，部分學者甚至認為培養數學解題能力就是學習數學的代名詞（Brown, Wilson, & Fitzallen, 2007）；是故發展數學解題能力之重要性，不言可喻。

文獻指稱「數學探究教學」能有效率提升學生的「數學解題能力」（Whitin, 2006），然而文獻並沒有深入探討其關聯。迄今，我們仍不明瞭「數學探究教學如何幫助學生提升數學解題能力」，也不清楚「提升哪些數學解題能力」，此外，對於「不同數學成就學生而言，有何差異」，釐清這些問題，將一、有助於實施探究教學；二、更深度的提升學生的解題能力；三、幫助不同成就學生的學習；有鑑於此，本研究目的如下：探討數學探究教學對四位不同成就的七年級學生數學解題能力之影響。

貳、文獻探討

一、數學探究教學

英國教育技能部 (Department for Education and Skills [DfES], 2001, p. 21) 主張「探究是數學的核心，探究技能可以讓學生問問題、定義探究的問題、計畫研究 (plan research)、預期結果 (predict outcomes)、推論與作結論」。Whitin (2006) 提出六個數學探究教學的重要特徵 (key feature)：(一) 細心觀察；(二) 採用多元的觀點；(三) 引起 (raising) 題；(四) 提供臆測；(五) 設計與執行計畫；(六) 反思這個結果。McNeal 與 Simon (2000) 認為數學探究教學是：(一) 由老師或學生佈題；(二) 學生在小組中工作；(三) 教師要求學生提出具說服力 (persuasive) 的論證；(四) 並且學生討論這些論證。因此，教師與學生在數學探究教學中的工作，分別如表1：

表 1 教師與學生在數學探究教學中的工作

教師參與探究教學藉由：	學生參與探究教學藉由：
1. 要求解釋	1. 發表想法 (ideas)
2. 要求澄清或示範	2. 問彼此問題
3. 要求小組提出論證	3. 在討論中挑戰 (challenge) 或精鍊 (refine) 想法
4. 佈新的問題	

綜合上述，數學探究猶如數學的「實驗」或「探索」過程，包含「問題—臆測—論證—精緻」的循環程序。首先(一)學生可以自己產生欲探究問題(也可由老師佈題引發)；(二)接著產生對題目的一或多個想法(臆測)；(三)並對這個想法提出數學的解釋(論證)；(四)再接受其他學生的挑戰，修改這個想法(精緻)；(五)並可再度回到(一)產生新的探究問題。

本研究並搭配 Siegel、Borasi與 Fonzi (1998) 的探究環，提出探究教學架構如表2：

表 2 探究教學架構

階段	教師活動	學生活動
1.情境佈局與產生問題	<ol style="list-style-type: none"> 1. 挑戰學生的原始想法，點燃學生的興趣並聚焦在值得討論的議題上。 2. 透過教師介紹任務，喚起學生的初始想法與欲探究主題之知識。 3. 清楚表達探究目標。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生回想過去的先備知識與學習經驗。 2. 學生參與開放式的探究任務之中。
2.小組與個人探究	<ol style="list-style-type: none"> 1. 精心引導並幫助小組/個人進行探究工作。 2. 回應學生在探究時的需求，如提供學生不同的思維方式。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生開始進行臆測、分析、推理與試驗等探究行為。 2. 獲得探究後的初步結果（過程中可以與小組討論）。
3.溝通與形成結論	<ol style="list-style-type: none"> 1. 給予學生機會，分享探究結果。 2. 學生在與他人溝通探究結果時，引導並幫助他進行討論。 3. 適時引導或幫助學生作結論（可使用閱讀教科書策略）。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生必須學習如何闡述自己的想法（如運用表格、圖形、證明等），與回應他人的意見。 2. 持續與他人討論，藉由相互辨正（identify）、論證的過程，獲致較精緻結果。
4.反思與精緻化	<ol style="list-style-type: none"> 1. 清楚說明重要的探究結果和意義。 2. 與學生討論探究過程與所習得數學知識。 3. 藉由評鑑學生的探究過程，幫助學生精進下次的探究。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生必須反思這整個探究的過程與確認在探究過程中所獲得的數學知識。 2. 依據反思，可能形成新的探究問題，開啟下一個新的探究循環。

二、數學解題能力

Polya (1945) 認為解題包含四個階段：（一）瞭解問題：強調瞭解題目的已知與未知，即識別清楚解題所需為何；（二）擬定計畫：解題者必須將階段（一）中的所有資訊整合起來，藉此獲得解題想法；（三）執行計畫：解題者

必須仔細謹慎的執行解題步驟；（四）回顧：解題者必須重新審視自己的解答、討論它並在必要時精緻它。基於 Polya (1945) 和 Schoenfeld (1985) 提出四個類型的知識，用來解釋解題者的行為：（一）資源：一個人的基本數學知識或數學程序的知識；（二）啟發法 (heuristics)：關於解題的策略或技巧，例如逆回去計算、畫圖等；（三）控制：解題時的後設認知，包括如何，以及何時使用何種資源或策略等；（四）信念：解題者的數學本質觀，可以決定一個解題者如何解題。上述中，Schoenfeld 尤其強調「控制」（後設認知）的重要。更進一步，Garofalo 與 Lester (1985) 討論解題中的四種「後設認知」活動：（一）「定位」(orientation)：包含理解策略、分析問題的條件與訊息、評估題目的熟悉度、評估問題的難度與成功機會、初步與進階的表徵問題等；（二）「組織」(organization)：關於找出目標與擬定計畫、子計畫等；（三）「執行」(execution)：包括局部行為、監控程序與計畫等；（四）「驗證」(verification)：意謂衡量決策與執行計畫的結果。Mayer (1992) 認為解題是由「認知程序」(cognitive processing) 所引導的，包括四個步驟：（一）「問題轉譯」是解題者將題目的敘述轉化到內部心理模式，即是解題者解釋和表徵題目的過程；（二）「問題整合」是將片斷的資訊，整合至一致性的結構，為下一個步驟作準備；在（三）「解答計畫」中，解題者形成具體的解題計畫；並在（四）「解答執行」中，逐步執行所擬定的計畫。

本研究擬以 Garofalo 與 Lester (1985) 的看法作為「後設認知」定義，因為（一）Garofalo 與 Lester 的研究是整合 Polya 與 Schoenfeld 所產生的，較具完整性。（二）Garofalo 與 Lester 是以國中生為主，與本研究較相關（Schoenfeld, 1985 的研究以大學生為主），因此 Garofalo 與 Lester 考慮更多年輕學生的問題，如認知資源的缺乏，同時也涉及課室文化、教學與後設認知上的關係 (Goos & Galbraith, 1996)。（三）Schoenfeld 的研究較缺乏研究上的信、效度。

綜合上述，本研究以 Polya 的理論為主軸，並輔以其他學者的觀點，使 Polya 的理論更加完善，包括：（一）Mayer (1992) 的「認知程序觀點」：例如學生如何轉譯問題、從先備知識發展策略進行解題；（二）Garofalo 與 Lester 的「後設認知」觀點：例如解題過程中是否瞭解目標為何，如何修正自己的解題思維，與解題後如何重新精緻這些策略；（三）Schoenfeld 的「信念」觀點：例如解題者的信念與學習動機為何。整合成本研究對解題能力之定義。

三、數學探究教學、數學解題教學與小組合作學習

Yore、Pimm 與 Tuan (2007) 認為解題和探究是兩個平行的辭彙，只是一個通常被用在數學教育，相對的另一個則是在科學教育之中。然而探究的一些特點，更能幫助學生學習。例如探究所強調的精神，比解題提供了更多瞭解學生思考的機會，因為探究強調的「臆測」與「論證」（或證明），較能充分顯露學習的過程 (Lederman & Niess, 2000)。Borasi (1996) 認為解題是指問題由教師設定，並且教師已預先知道解答。然而在探究的模式下，學生參與在一個更開放與產生性 (generative) 的過程，在事前不管是教師或學生都可能不知道探究結果，並且學生通常主動的融入關於探究的方向與範圍的決策。

「小組合作」被視為實施探究教學的一種策略 (National Research Council, 2000)，符合當代對於改革取向教學的要求，例如 Elbers (2003) 所提出的「探究的社群」(community of inquiry)，意謂學生使用研究者的態度進行學習，透過同儕的討論、溝通與反思，共同建構數學知識。Staples (2007) 的「全班性的合作探究」(whole-class collaborative inquiry)。他認為改革取向的潮流，是讓學生有機會能在「學習者的」社群中建構知識。

參、研究方法

本研究為個案研究，以同組四位不同數學程度學生為個案，使用「任務為基礎的訪談」(task-based interview)，作為分析學生「解題能力」的主要依據。並以「課室觀察」記錄學生在探究教學中的表現，再搭配學生與教師在探究教學課程後撰寫的「學習日誌」與「教學日誌」，進行整體性的分析。

一、研究情境

本研究在七年級上學期的數學課進行，教學單元是「一元一次方程式的應用」，接續在「以符號列式」、「一次式的運算」、「一元一次方程式的解法」單元後實施，為期五週，每週六節，共三十節課，期間經歷四次課程（課程內容如附錄一）。選取此單元的原因是：（一）傳統的教學方式，導致學生在此單元的學習困難，如無法依據題意列出方程式等 (Vlassis, 2002)，本研究

擬透過探究教學提升學生在此單元的學習成效。(二)學生在這個單元中有較多「應用」數學知識的機會，必須思索如何解題，非單純記憶公式，這有利於探究教學的實施 (DfES, 2001)。

本探究教學是以小組合作的方式進行。依照學生暑期輔導數學成績與第一次段考數學成績的平均，以S型方式分組，共分七組，每組四人，包括一位高數學成就(前25%)、二位中數學成就(中間50%)及一位低數學成就的學生(後25%)，其中一組僅三人(全班共27人，男生10人，女生17人)。

二、探究教學活動設計

探究教學活動設計係參考 Borasi (1996)，以(一)學生易錯誤之題目(答案不是立即可知，可引發較多討論)；以及(二)有多種解法，可以提供學生論證機會(對自己想法提出說明)，為設計理念；同時參考各版本教科書、參考書與段考中常見問題設計而成。圖1是研究者改編自部編版(國立教育研究院籌備處，2006，頁187)之範例：

據說希臘數學家丟番圖的墓誌銘，是一首藏著他年齡的詩謎，依據下面的文字，你可以解出這個謎嗎？

童年占他六分之一的人生，又過十二分之一，人已鬍鬚如戟，再添七分之一的年歲，點燃起結婚的蠟燭。五年之後，天賜麟兒，可惜這位遲到的寶貝，享年僅及其父之半，便進入冰冷的墓。悲傷只有用數論的研究去彌補，又過四年，他也走完了人生的旅途。

圖1 探究活動範例：丟番圖墓誌銘

圖1屬「易錯誤的題目」，學生的困難在於不知如何從文字敘述，轉譯成數學式子。在此過程可引發許多討論，例如學生可能對題意產生不同解讀，認為「又過十二分一」是指「一生的十二分一， $\frac{1}{12}x$ 」或是「扣去六分之一後的十二分一， $(x-\frac{1}{6}x)\times\frac{1}{12}$ 」。

初步設計完成教案後，研究者與研究團隊(二位資深國中數學教師與一位數學教育專家學者)進行討論，確保教學活動之可靠性。

三、探究教學範例

表3是本研究探究教學的範例。其中在(三)「溝通與形成結論」階段，可看到學生提出不同想法，進行「論證」(陳述為何其論點為真)的過程，此為探究教學的最大特色。

表3 探究教學範例：丟番圖墓誌銘

階段	活動內容
(一) 情境佈局與產生問題	一開始，老師跟同學討論什麼是「未知數」與「方程式」，以及如何應用它，藉此回顧同學在課程一所學。例如詢問「你們知道什麼是未知數」；「有哪些使用未知數或方程式的經驗」；接著老師歸納大家的討論，說明「解題就像是在猜謎，解未知數的過程就像是在找出謎底一樣」，讓同學覺得解題是有趣的工作。之後向同學概略介紹丟番圖的故事，請學生破解他墓誌銘上的秘密，引起同學探究「丟番圖墓誌銘」(圖1)之動機。
(二) 小組與個人探究	學生在此過程，出現許多想法與疑惑，例如對「題意瞭解不清」、「無法列出完整的方程式」、「無法論證自己的猜想」等；老師便針對這些疑惑，引導學生進行探究。下面的對話是某一小組的學生在計算 $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + 5 + \frac{1}{2} + 4$ 的過程 中得到 $\frac{75}{84} + 9$ ，所以猜測答案是84歲，老師引導學生去論證自己的答案： <div style="border-left: 2px solid black; padding-left: 10px; margin-left: 20px;"> <p>生：老師是不是84歲？(臆測)</p> <p>師：你怎麼算的？</p> <p>生：我們用猜的，因為把全部的分數加起來，分母是84，我們覺得有可能就是84...(論證)</p> <p>師：你們的答案是對的，可是你們不能因為通分是84就覺得是84，要想辦法說明這樣的想法是對的...(挑戰)</p> <p>生：(小組彼此討論後...)嗯...我知道...他的一生是1嘛...只要找出$\frac{84}{84} = 1...$ 就可以說他是84歲...(論證)</p> </div>

(三) 老師引導各組或同學上台發表自己的想法，並接受同學挑戰，在此出現許多溝通與爭論，學生便針對這些爭論進行論證，獲致結論。例如學生對於「再添七分一」是指「一生的七分之一， $\frac{1}{7}x$ 」或是「扣去前面後的七分之一， $(x-\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}x)\times\frac{1}{7}$ 」

引發爭議：

生：老師這個「再添」到底是什麼意思？（挑戰）

師：我也不知道，但是你們可以實驗看看，假設 $\frac{1}{7}x$ 與 $(x-\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}x)\times\frac{1}{7}$ 究竟有什麼不一樣？

生：一個算出來是 84（解 $\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$ ）；另一個是 63（解

$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{3}{28}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$ ）阿（論證）

師：那你們覺得 84 歲比較可能，還是 63 歲，想想看，哪一個答案合理？為什麼？

(四) 在此階段，老師的工作主要是歸納在上述探究過程所學，並藉由討論這些探究過程，精緻學生的思維與引發新的探究議題。例如：

師：好，從剛剛各小組的發表，和討論的過程，你們學習到了什麼？

生：嗯...學到怎麼用方程式算出來答案

師：那解這個題目有哪些方法？

生：可以假設「一生」是 x ，然後把這些幾分之幾假設出來列方程式，最後算出來答案

師：很好，那可不可以不要用未知數的方法？

生：剛剛有人是用通分找出讓 $\frac{84}{84}=1$ 的方法，他就沒有用未知數；還有人

用 $(4+5)\div(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{7}-\frac{1}{2})$ 也可以算出答案...

四、訪談任務設計

關於訪談任務設計，首先考量（一）Yerushalmy (2000)，他認為訪談中的任務，需讓受訪者感受情境（可以有較深入的解題思維）；並能呈現豐富的解題歷程（有利於分析解題能力）。其次，（二）我們從探究教學活動，選出較具代表性的問題，設計結構相仿的訪談任務。這些訪談任務，可依據解題條件分成「速度」、「年齡」與「餘數」等三類（表4）。設計訪談任務的過程與探究教學活動設計過程相似，也歷經與研究團隊討論、修正的程序。

表 4 教學前後訪談任務

分類	說明	階段	任務
速度	需使用速度概念	教學前訪談	放學後你帶著你們家的小狗去學校操場散步，假設你走路的速度是小狗的_倍，你們一起從跑道出發一段時間後，又在當初的起點遇到小狗，你很好奇小狗究竟走了幾圈，此時旁邊有位好心的陌生人提醒你們總共走了 10 圈，但糊塗的你卻忘記自己走的圈數，在這些有限的條件下，你還有辦法知道小狗走了幾圈嗎？
		教學後訪談	假設你是高鐵的電腦工程師，你接獲用電腦模擬比較高鐵與台鐵行車時間的任務，在軟體中你必須先分別輸入假設的高鐵與台鐵速度、行進間的距離等資料，在一次的模擬中，電腦顯示結果如下：「高鐵速度 15 公里/小時；台鐵速度 10 公里/小時，高鐵比台鐵早抵達終點 10 分鐘」但因系統上的錯誤，導致你找不到當初所假設的距離；你能從上述這些結果找出行進間的距離嗎？
年齡	需知道兩者年齡差距固定	教學前訪談	有一天妮妮問數學老師今年幾歲？數學老師說：「我像你這麼大時，你才 5 歲；等你到我這麼大時，我就已經 32 歲了。」請你幫幫妮妮算出數學老師現年是幾歲？
		教學後訪談	粗心的小紅帽被大野狼捉住了，高興的大野狼準備將她碳烤後吃掉，快被嚇昏的小紅帽苦苦哀求，大野狼於是給了她一次機會，牠說：「除非妳能猜出我幾歲？我就放了妳！」大野狼的提示如下：「我像妳這麼大時，妳才 6 歲；妳到我這麼大時，我就 21 歲了。」緊張的小紅帽，連自己幾歲都嚇得忘記了，怎麼辦？救救小紅帽吧！你能算出來大野狼的歲數嗎？
餘數	需瞭解所求的總數固定	教學前訪談	假設我們學校被選為才藝班考試的場地，現在不知道報考人數，也不知道學校提供多少個試場，但是從老師的談話中，你發現如果每個試場以 50 人分配，其中會有 2 個試場只有 40 人；若每個試場以 40 人來分配，那麼其中有 3 個試場會分配到 60 人，從上面的訊息，你可以知道共有幾個試場，報名人數有多少人嗎？
		教學後訪談	假設你隔壁班的好朋友是今天的值日生，他的工作是分配營養午餐的饅頭給班上同學。現在已經知道他班上共有 50 人，饅頭比班上同學還多，共有 60 個，由於女生食量較小，經班上同學討論後，大家決定男生 1 個人可以吃 2 個；女生則是 3 個人吃 2 個，這樣剛好可以把所有的饅頭分配完，那麼你知道隔壁班有多少男生、女生嗎？

五、數學解題能力評量

本研究使用兩種方式（量與質）來分析解題能力。

（一）解題力量化分析量表

此量表 (Szetela & Nicol, 1992) 是以 Polya (1945) 的解題架構為基礎，內含三個向度：「瞭解問題」、「解決問題」與「回答問題」。因此「瞭解問題」與解題者是否識別清楚解題所需有關；「解決問題」與解題者如何「擬定計畫」有關；「回答問題」與解題者如何「執行計畫」有關。然其中缺乏對「回顧問題」的評量，經研究團隊討論後加上此向度，以0-2分描述學生在回顧問題的表現，其中2分意味能夠精緻原本的解題策略，發展出更佳解題方式；或是能夠以其他合宜的方式解題（評分範例見附錄二）。

表 5 解題能力分析架構

向度	得分與說明
瞭解問題	0—沒有嘗試；1—幾乎錯誤解讀問題；2—錯誤解讀問題的主要部分；3—錯誤解讀小部分問題；4—完全瞭解問題
解決問題	0—沒有嘗試；1—完全不適合的解題計畫；2—部分正確的程序但大部分是錯的；3—基本上程序正確但有小部分的疏漏或程序錯誤；4—沒有算術錯誤並能得到正確解答的計畫
回答問題	0—沒有嘗試或不適合的解題計畫導致錯誤；1—抄寫錯誤；計算錯誤；少寫一些解答；沒有對解答描述；對答案的描述錯誤；2—完全正確
回顧問題*	0—沒有嘗試；1—能檢驗答案是否正確；2—能提出恰當的不同解題策略

註：「*」，本研究新增的向度

（二）解題能力質性分析標準

本研究團隊依據 Polya (1945) 的架構自編而成。依其架構，有效率的解題應該包含：1. 能夠清楚瞭解題意，說明題目的條件；2. 能夠流暢的使用數學知識，提出解題策略進行解題；3. 當解題遇到挫折時，能重新組織題目的資訊，提出不同的策略；4. 能判斷答案是否合理，並有能力提出不同的解題策略。上述將提供本研究在質性分析時的標準。

六、研究參與者

本研究學校位於南投地區，屬中小型規模，全校共21班，部分學生是原住民。整體而言，學生成績表現略差。本研究選取七年級的一個班級作為個案班級，主因（一）該班學生較活潑，有利於探究時討論活動的進行；（二）此班級數學成績屬該校的中上程度，有一些表現較突出的學生，可在探究時，作為領導者的角色。

為了深入探討不同成就學生的解題能力，以及瞭解同組內的互動，我們刻意選擇一個組別為參與者。選取該組的原因是該組學生彼此有良好的互動，也很投入於探究教學。介紹如下（匿名）：

1. 怡璇：女生，高成就。個性內向，很用功也很積極，上課總是以很認真的表情在聽講，不過遇到問題時都不曾發問，也不喜歡發表想法，但私底下是一位很有想法的學生。
2. 紹庭：男生，中成就。上課反應很冷淡，從他上課時的表情及反應，很難看出他是否理解老師教的內容，喜歡寫一些簡短的算式來突顯自己的數學能力，但有時不知所云。此外，計算能力不佳，易有小錯誤。
3. 雅慈：女生，中成就。在班上成績並不突出，上課也很少回應，平常上課很少注意到她。但她的口語表達能力很不錯，曾多次代表班上參加演講比賽，只是在數學課並不常發言，可能是因為成績沒有很好，比較有顧忌。
4. 婉伶：女生，低成就。個性非常活潑外向，非常喜歡表現自己。上課最有反應且回答最大聲，可惜數學程度不佳，所以常會回答錯誤，不過每次被其他同學取笑時，她似乎不太在意，很開朗的女生。

七、資料來源

資料來源有四，說明如下：

（一）任務為基礎的訪談

採一對一，每位學生一小時，並於過程中錄影。分別在探究教學前後實施（共兩次），每次需回答三題訪談任務，各類一題（表4）；目的是瞭解學生在探究教學前後，解題能力的差異。前後訪談任務，結構相仿但不一致。訪談

程序是先讓學生自己解決訪談中的「任務」，接著研究者依據學生的解答，詢問學生「瞭解問題」、「解決問題」、「回答問題」與「回顧問題」等四個向度之相關問題，例如：1.請概略解釋題意與題目所求。例如什麼是已知數？什麼是未知數？題目的條件為何？（瞭解問題）2.請說明你如何解決這個問題？怎麼想到這個解題策略的？如果沒有想出解題策略，那麼你的困難在哪？（解決問題與回答問題）3.你如何驗證你的答案？是否還有其他解題方法？（回顧問題）。此外，在教學後訪談並增加4.探究教學對你解題上的影響？等相關問題。

（二）課室觀察

利用錄影、錄音與相機記錄探究教學之情形。

（三）學習日誌

在每次課程結束後撰寫。目的是瞭解學生在探究中的學習與其解題思維，透過學生敘述探究過程中的心得，並對解題進行反思與回顧。如1.在這次教學活動中，我學到…（如數學知識、解題能力、探究技巧或是其他）2.在這次教學活動中，我印象最為深刻的是…3.在這次教學活動中，你覺得自己解題的表現如何？

（四）教學日誌

在每次課程結束後撰寫。教學後，研究者會針對每堂課的教學進行記述性的描述與反思，包括記錄小組討論情形，教學對話，學生學習表現等，作為輔助分析之用。如：1.此次的上課過程的摘要描述。2.此次探究教學過程中，個案學生的學習表現。

八、資料分析與編碼

資料分析，可分為兩個階段。第一階段先對「訪談」與「課室觀察」的錄影、錄音進行必要的轉錄。接著依據學生在訪談中的表現，使用「解題能力分析量表」（表4）與「解題能力質性分析標準」進行初步的評分與註解（描述個案解題能力）。這個過程，是由研究團隊先共同檢視個案在訪談中解決任務的過程，先在轉錄稿中寫下關於個案解題能力的註解，並給予初步的評分，評

分者信度介於.79-.93之間，對於爭議之處（評分不一致），研究團隊進行反覆的磋商與討論，直到達成共識。

第二階段的分析，是從上述四種不同資料來源，整體性的分析探究教學如何影響學生的解題能力。依據 Warfield、Wood 與 Lehman (2005) 的質性資料分析程序，先將上述四種不同資料來源逐一檢視，接著進行互相比較，瞭解其關聯，藉此勾勒探究教學對解題能力的影響。

本研究使用「資料來源-日期」作為編碼的依據，如2009年1月1日「學習日誌」上所寫的內容標示為「SJOUR-090101」。其他代碼說明如下：課室錄影或錄音，「REC」；訪談，「INT」；教學日誌，「TJOUR」。

九、三角校正

本研究使用「資料來源」與「分析者」的三角校正。例如研究者在分析學生的解題表現時，會仔細檢視本研究蒐集的不同資料，並且透過研究團隊的分析與討論，才做最後的論述。諸如表6，研究者對怡璇回顧問題能力的詮釋，係透過四種不同資料 (INT、REC、SJOUR、TJOUR) 交叉檢驗，以及與研究團隊討論後，才形成共識：

表 6 三角校正舉例

研究者詮釋：怡璇的「回顧問題」向度（提出不同解題策略的能力）表現不佳，與其解題信念有關。	
（摘錄； R1、R2、R3 研究團隊成員）	
討論 (TJOUR-09 0108)	R1：沒辦法用不同策略的原因很多，妳怎麼確定她是信念的問題？ R2：因為其實她成績很不錯，數學知識沒有問題，只是想法太死板...應該說有點固執...不太能接受其他解法。 R3：我也同意 R2 的說法，你看喔，像她在訪談的時候就有提到...（引用多元證據來說明）
INT (081024)	（訪，訪談者；怡，怡璇） 訪：妳認為一個題目不可能有其他的解法呢？ 怡：以前數學題目都只會有一個正確解法，所以不太可能會有兩個吧！

	(紹, 紹庭)
	紹：妳這個題目可以用畫圖（畫數線）來想...
	怡：數線，怎麼畫？
REC (081031)	紹：就是這樣啊（向怡璇解釋如何畫）...
	怡：我聽不懂...
	紹：爲什麼？
	怡：我覺得這種題目就應該用 x 算，你這樣很奇怪...（註：只能接受代數解法）
SJOUR (081226)	在這次活動中我領悟到這句話：「以不同的角度去看待題目更能感受到數學的奇妙與樂趣」，且我也學到如何用逆向思考的方式去解題（註：信念改變）。
TJOUR (081027)	從訪談中研究者發現怡璇的答案因爲少寫其他答案，所以導致無法拿到全部的分數，透過訪談才知道在她的認知裡面是不可能會有不同的答案。

肆、發現與討論

一、怡璇的解題表現

表7可以發現怡璇在教學前後訪談，「瞭解問題」、「解決問題」與「回答問題」等向度皆有不錯的表現（3.3、3、1.7分；3.7、3.7、2分）；「回顧問題」在教學前表現不佳（0.3分），但在教學後訪談提升到1.7分，這似乎意味實施探究教學後，她具備更多提出不同解題策略的能力。

表 7 怡璇在訪談中的表現

時間	瞭解問題	解決問題	回答問題	回顧問題
教學前訪談	3.3/4	3/4	1.7/2	0.3/2
教學後訪談	3.7/4	3.7/4	2/2	1.7/2

註：分母是該向度的滿分

（一）教學前訪談，怡璇的「回顧問題」向度表現不佳，與其解題信念有關

怡璇在教學前訪談獲得不錯的分數，她都是以設未知數與列方程式（代數）來解決這些任務，但只要無法使用代數解題時，就會放棄。以教學前訪談一速度問題（表3）為例，怡璇不知道如何假設此題的未知數，因而無法作答，當研究者（訪談者）進一步要求她嘗試其他策略時，她認為不用代數解題，就不能算是「數學的解法」：

訪：這題為什麼不會做？

怡：我是看得懂題目，但這不能用數學式子（代數方式）來做運算，我就沒寫了。

訪：那如果用紹庭的方法呢（非代數方法）？妳認為呢？

怡：我覺得那不能算是數學的解法。（INT-081024）

因此她在「回顧問題」表現不佳，顯示她缺乏思考不同解題策略的能力，歸究其原因，可能是她的解題信念中，不能接受多樣的解題路徑（見表6，INT）。

（二）其他同學在探究教學中的優異表現，刺激怡璇改變信念

隨著探究教學的進行，怡璇有機會接觸同組其他同學展現許多不同的解題方式（如紹庭，圖4），並且有時這些代數以外的解題方式能更有效的解決問題，怡璇逐漸對她的解題信念感到懷疑，經一番掙扎後，也願意學習其他同學的解題方式：

怡璇剛開始滿排斥探究的上課方式，因她認為一個題目不可能有不同解法，所以在探究教學中，她也不願意思考其他的解題方法；相較於其他組員的投入（擁有多元的解題思維）讓她感到挫折，但怡璇是一個好勝心很強的學生，探究教學對她的幫助是讓她感受其他組員的長處，激起她的鬥志。（TJOUR-081027）

雖然這次的課程表現不是很理想，但是看到其他人的優異表現更能激發我的上進心，就是不想輸給別人，下次我會贏回來的。（SJOUR-081027）

怡璇是高成就的學生，她的學習效率優於其他同學，因此在這些訪談任務中，她能較熟悉的使用代數解題，並認為這就是唯一的解題方式。然而在數學

探究中，不強調解答的「權威性」(Siegel, Borasi, & Fonzi, 1998)，注重解題歷程，鼓勵學生用多元方式解題，因此其他同學有機會在探究教學活動中展現不同的解題策略，解決怡璇不會的問題；這挑戰著她的信念，同時這也激起她的企圖心，她不願意輸給那些成績比她差的同學，於是逐漸願意接受這些代數以外的解題方式。特別說明，在此並非強調代數的解法不好，只是解題能力應包括靈活的使用解題策略。

(三) 探究教學促進怡璇整合先前的數學知識，提升「回顧問題」能力

當怡璇逐漸改變信念時，她開始學習同組其他學生的非代數解法（如紹庭），並在教學後訪談能提出多種不同的解題策略（如比例），提升「回顧問題」能力。以教學後訪談一速度問題為例（表4），怡璇在之前都是慣用代數來解此類問題，但在教學後訪談，她並沒有因為列方程式受挫就放棄，反之她嘗試從先備知識發展解題策略（圖2）。

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{6} \div \frac{1}{30} = 5$$

圖 2 怡璇從先備知識發展解題策略

圖2中，她很巧妙的利用「速度的倒數比」（把 $\frac{\text{公里}}{\text{小時}}$ ，轉換成 $\frac{\text{小時}}{\text{公里}}$ ，比較每公里的時間差距）和「除法」（10分鐘是 $\frac{1}{30}$ 的幾倍）解題成功。這個策略是從先備知識發展而來，因在國小階段，學生就學習過類似的追趕問題，在此的特別之處是怡璇能夠將每小時公里，轉換成每公里小時來解題，展現靈活的思維。

從 Mayer (1992) 的解題認知程序來看，先備知識在解題中扮演重要角色，因為先備知識牽繫「主動認知」的成功與否。探究教學中，學生擁有許多自主探索的機會，並有機會與其他同學溝通討論這些探索的想法，這個過程可活化學生的先備知識，因為當學生在主動探索問題時，都是由先備知識開始思考。

二、紹庭的解題表現

表8可以發現紹庭在教學前「瞭解問題」表現較差，僅得1.3分，另外「解決問題」、「回答問題」也沒有很突出（2.7、1分），因為他很容易出現計算上的錯誤。但「回顧問題」卻是紹庭的長處，在解題過程中，他能提出許多不同的解題策略，因此教學前後都能獲得不錯的分數（1.7、2分）。

表 8 紹庭在訪談中的表現

時間	瞭解問題	解決問題	回答問題	回顧問題
教學前訪談	1.3/4	2.7/4	1/2	1.7/2
教學後訪談	4/4	3/4	1.3/2	2/2

（一）教學前訪談，紹庭的「瞭解問題」向度表現不佳

紹庭有著不錯的思考解題策略能力，在探究教學過程中，能夠提出許多不同解題想法，引發小組探究的氛圍，但「瞭解問題」是紹庭較弱的一環。圖3是紹庭在教學前訪談，因對題目「你走路的速度是小狗的 $\frac{3}{2}$ 倍」解讀錯誤（表4），直觀認為「我」與「小狗」的速度比是 $1:\frac{3}{2}$ ，導致將「我」的速度假設為 x ；「小狗」的速度假設為 $\frac{3}{2}x$ （圖3左側，正確的假設小狗的速度應為 $\frac{2}{3}x$ ），獲得錯誤答案6圈（圖3左側打圈處）。

設我的速度 = x 設它的速度 = x
 它的速度 = $\frac{3}{2}x$ (6) 我 = $\frac{2}{3}x$
 $x + \frac{3}{2}x = 10$ $x + \frac{2}{3}x = 10$
 $\frac{5}{2}x = 10$ $\frac{5}{3}x = 10$
 $x = 4$ $x = 6$
 $\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$
 $10 \div \frac{5}{2} = 10 \times \frac{2}{5} = 4$
 $1 : \frac{3}{2} = 4 : 6$
 A = 6圈

圖 3 紹庭錯誤解讀題意，獲得錯誤答案 6 圈

紹庭在訪談者的要求下，也用另外兩種方式驗證答案。第一個方式與原來的想法相同，只是將原本假設的未知數互換（圖3中間），由於沒有修正兩者的速度比（在此應假設「我」的速度為 $\frac{3}{2}x$ ），依然獲得錯誤答案 $x=6$ 。第二個方式則是使用比例。先將兩者速度比相加（ $\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ ），接著將「總圈數」與「總比例」相除（ $10\div\frac{5}{2}$ ），獲得「我」跑4圈，但依然認為我與小狗速度比是「 $1:\frac{3}{2}$ 」，仍獲得6圈的錯誤解答。

上述紹庭理解題目條件關係的能力不佳，導致解題錯誤，即使有能力用不同方式解題，依然無法幫助他發現錯誤。下面的訪談，研究者提示他假設有誤，擬瞭解他是否不小心看錯題目，但從他的回答，他似乎仍不知錯誤為何：

訪：你的假設好像跟題目的意思不一樣？

紹：有嗎？我也不知道…可能是有時候腦筋容易打結吧，我也沒辦法阿！（INT-081024）

（二）探究教學中的小組討論，幫助紹庭「瞭解問題」

在後面的探究課程三中，我們也討論一些類似的速度問題，紹庭便將這個訪談任務提出來，作為「反思與精緻化」階段的探究議題。討論過程中，雅慈、怡璇的解題想法扮演關鍵角色：

（雅，雅慈）

紹：你是怎麼算的？

雅：假設小狗走1圈時，我就走 $\frac{3}{2}$ 圈，所以一次就會走 $1\frac{3}{2}$ 圈，因此把 $10\div 1\frac{3}{2}$ 就知道得走4次，

所以小狗就會走4圈阿...

紹：我也是有用跟你一樣的做法阿，可是為什麼我算出來就是6圈（仍然不知道自己假設有誤）...

怡：你錯了啦，你把小狗跟我的倍數看錯

紹：（想了一下）...有嗎？我是我家小狗的 $\frac{3}{2}$ 倍，那是小狗比較快阿...

怡：不對，應該是「我」比較快，「前面」(人)的比「後面」(狗)的快...

紹：為什麼？

怡：你看喔...我是小狗的 $\frac{3}{2}$ 倍，那代表小狗是1倍的時候，我是 $\frac{3}{2}$ 倍，所以小狗走2圈，我就會

走3圈，「前面」是「後面」的倍數啦...

紹：喔，那我懂了，我搞錯它們的關係了(題意)(REC-081031)

上述我們發現探究教學中，雅慈、怡璇透過討論，分享彼此的解題方式，幫助紹庭「瞭解問題」，可見探究教學中的論證(分享或解釋自己的想法)對解題能力很有幫助，不僅促進自己思考，也能幫助對方更瞭解題意。

(三) 教學後的訪談，紹庭展現更精緻的「回顧問題」能力

透過進一步的質性分析，我們發現紹庭在教學後訪談，有著更精緻的回顧問題能力，能靈活的使用解策略，並更加監控他的解題行為。例如教學後訪談一餘數問題(表4)，他除了能以代數作答，也能巧妙的運用「比例」與「列表」推理出答案。解題過程是先依據男生1人吃2個的比例，依序列出男生人數與吃的個數(10人=20個、20人=40個...)，列到50人後(因班上共有50人，不需再往下列)，他開始考慮饅頭的個數只有60個，因此30人、40人、50人的答案都不可能，予以刪去(饅頭數 ≥ 60 ，與題意不合)。接著再列出女生吃的個數，但不是像男生一樣從10人開始列，他考慮全班有50人的條件，以數對的方式來列表，因此男生10人時，對應女生人數是40人(但饅頭數非整數與題意不合，故刪去)；很快的，在男生20人時，女生是30人推理出正確解答(饅頭數為 $20+40=60$ ，與題意相符)(圖4)：

Handwritten work showing a table of student counts and buns eaten, with some entries crossed out:

10人 = 20個	40人 = $\frac{80}{3}$ 個
20人 = 40個	30人 = 20個
30人 = 60個	
40人 = 80個	
50人 = 100個	
50-10 = 40	

圖4 紹庭展現卓越的回顧問題能力

紹庭在解此題時，展現卓越的回顧問題能力。他能融會貫通題意，充分掌握題目的條件，因此在列表「嘗試錯誤」（刪去不合理答案）過程中，不需列出很多可能答案；也很有技巧的將男生與女生的人數用數對來表現，在計算女生吃的饅頭數時，也能瞭解女生人數與饅頭數的比為「 $1:\frac{2}{3}$ 」，這些表現都導向於對題意充分瞭解，並且更加監控自己的解題行為。

前述我們曾提及探究的過程，就是「臆測—論證—檢驗—精緻」的反覆程序，我們認為紹庭的成長，來自探究教學中必須向同學說明想法（論證）與接受挑戰（檢驗），由於紹庭本來就是一位有很多解題想法的學生（可提出較多臆測），因此他有更多機會經歷這個探究循環，促使他一再反思自己的解題思維，進而提升「回顧問題」能力。

三、雅慈的解題表現

表9可以發現雅慈在教學前訪談中，「解決問題」、「回答問題」與「回顧問題」的表現都不理想（分數：1.3、0.3、0），但在教學後訪談，各個向度都有成長（分數：3.3、1.7、1.7），這似乎顯示雅慈在經歷探究教學後，提升其解題能力。

表 9 雅慈在訪談中的表現

時間	瞭解問題	解決問題	回答問題	回顧問題
教學前訪談	3.3/4	1.3/4	0.3/2	0/2
教學後訪談	4/4	3.3/4	1.7/2	1.7/2

註：分母是該向度的滿分

（一）教學前訪談，雅慈在「解決問題」與「回答問題」向度表現不佳，與教學方式有關。

雅慈在教學前訪談的表現，低於研究者的預期，因為從她平常的考試成績，研究者認為她在前三個向度不至於與紹庭差距太大（不含「回顧問題」，因此向度紹庭本來就較佳），然而事實上她在「解決問題」與「回答問題」都較紹庭差（ $1.3 < 2.7$ ； $0.3 < 1$ ）。從訪談中，我們發現這是因為雅慈在「一元一次方程式」單元學習不佳，因此就算她可以瞭解問題，卻無法發展有效的解題策略：

訪：我看你好像都不太會做這些題目（教學前訪談任務）？

雅：對阿…

雅：我不太知道怎麼寫…

訪：為什麼？我們不是教過一些未知數的東西，你可以試著從假設未知數來著手阿…

雅：但是其實我不太懂這個章節（一元一次方程式）的內容，可以說完全沒吸收進去…

訪：為什麼？

雅：因為我都只是聽老師在講，沒有自己做題目，然後我聽不太懂，也沒有機會去想這些該怎麼用…（INT-081024）

從上述訪談，我們發現可能是過多講述，剝奪雅慈嘗試應用這些概念的機，阻礙她的學習，所以透過學生為中心的探究教學，也許對雅慈能有助益。然而事實上，這也與研究者的期待有所出入，雅慈一開始在探究教學中的表現也不好，她沒有很投入探究的活動（無法主動提出臆測與同學討論）。

（二）剛開始雅慈無法適應探究教學，但同學的表現激起她的學習動機

由於雅慈在先前的學習不佳（以符號列式、解方程式），導致她沒辦法投入同學的討論，也不明瞭同學討論的內容：

我還是不太懂這個單元耶，只是一直聽大家講，但是大家也只是口頭上討論，也沒有寫下來，所以討論完也不知道結論是什麼…（REC-081027）

儘管如此，雅慈並沒有放棄，相反的，她卻因為別人能夠發表許多解題想法，刺激她也想要有好的表現，雅慈也是個好勝心很強的學生，這個特質與怡璇相仿：

雖然跟不上他們的思考速度，但卻激起我要學好數學的決心，我相信這只是一個小起步，下次收穫一定會更多，希望我能融會貫通。（SJOUR-081027）

這是個有趣的現象。探究教學中強調的臆測與論證，讓一些原本數學程度較差的學生，有較多的發言機會，因為他們可以從先備知識發展一些解題想法，雖然有時候這些想法對解題沒有幫助，但卻對好勝心較強怡璇、雅慈有很大的刺激。她們會因為別人積極的表現，引發自己的學習動機，這是探究教學

在情意上的影響（提升學習動機）。

（三）雅慈逐漸融入探究教學，並透過學習與協助溝通不同解題想法，進而提升解題能力

隨著探究教學的進行，雅慈逐漸能參與同學的討論，表現也越來越好，在探究課程的後期，也能嘗試用代數來解題，優於教學前訪談的表現。進一步分析，發現幫助雅慈改變的原因有二。首先代數以外的解題方式（如比例、繪圖）幫助雅慈「解決問題」。因為在探究教學初期，雅慈還不太會使用代數的解題方式，但她能理解同學從先備知識發展出來的解題策略，藉由探究教學的「溝通與形成結論」階段（學生發表自己的解題策略），雅慈學習到許多不同的解題方式。

訪：我看妳好像表現越來越好，為什麼？

雅：因為我現在開始慢慢會去想她們的想法。

訪：什麼意思？

雅：剛開始的時候，我覺得他們用的解題方式都好神奇喔，我聽不太懂，可是慢慢的，我試著去理解他們的想法，後來就知道他們在說什麼，現在都聽得很懂，然後我也會幫紹庭解釋他的想法，加入大家討論，就變得越懂越多…（REC-081031）

第二個幫助雅慈融入探究教學的原因，是雅慈的溝通表達能力很好，她常需要幫紹庭解釋想法（紹庭口語表達較差，但提出解題想法能力佳），因此她需要融會貫通紹庭的另類解法，還需要用其他同學可以接受的方式表達，這個過程可以幫助她逐漸精緻解題思維。例如探究課程四，紹庭針對課程一的「丟番圖墓誌銘問題」（圖1）提出進一步的探究（不同的解題方式，圖5），可是紹庭無法很清楚闡述他的想法（只是照著算式念一次），雅慈便幫忙紹庭解釋，但雅慈也不是一開始就很瞭解紹庭的思維，她一邊解釋、一邊與紹庭討論，藉由持續對話的過程，精緻自己的思維，最後融會貫通的用畫數線解釋算式（圖5，下半部），其他同學便很輕易的瞭解紹庭的思維：

$$9 \div \left[1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{2}{18} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= 6 \frac{3}{4}$$

圖 5 雅慈協助解釋紹庭的想法

經由上述過程，雅慈逐漸發展出不錯的解題能力，雖然她無法自己想出解題策略，但能從聆聽別人的解法中，學習與應用他人的解題方式。在教學後的訪談，她也能用代數的方式解題，這是因為當她具備自己解決問題的能力後，她重新審視其他同學的代數解法，並且在小組中與紹庭、怡璇討論，逐漸學習到代數的解題方式（圖6，題目見表4）：

設高鐵路站的時間為 x

$$\frac{15}{60}x = \frac{10}{60}x(x+10)$$

$$\frac{15}{60}x = \frac{10x^2+100}{60}$$

$$15x = 10x^2+100$$

$$x = 20$$

$$20 \times \frac{15}{60} = 5 \text{ AS km}$$

圖 6 雅慈的代數解題

訪：我發現妳最近都開始會用方程式來解題喔！

雅：對啊，之前都不知道他們（紹庭、怡璇）在寫什麼，也不知道自己在算什麼，但是後來先學會其他方式後，再回過頭來看…然後有不懂的我又跑去問怡璇，慢慢的就學會了…終於知道設未知數也很好用，也知道自己在寫什麼了。（INT-081105）

從上述，我們發現探究教學中的小組互動對雅慈的幫助，首先雅慈可在此互動過程中學習其他同學的解題方式，其次透過幫助組員解釋想法的互動過程，也間接促進自己的解題能力。這符合 Siegel、Borasi 與 Fonzi (1998) 的論點，他們認為學習是一個賦予意義 (meaning making) 的過程，同時需要社會的互動（與同儕溝通討論），以及個人的建構；探究教學中，提供良好的互動機會，可以幫助學生建構出自己的知識。

四、婉伶的解題表現

表10中，婉伶在教學前的訪談表現不佳，各個向度的分數都很低（分數：1、1、0、0），但在教學後的訪談，她在「瞭解問題」、「解決問題」與「回答問題」有著長足的進步（分數：3、3、1.7）。這似乎顯示探究教學後，婉伶解題能力提升，但在「回顧問題」仍沒有起色。

表 10 婉伶在訪談中的表現

時間	瞭解問題	解決問題	回答問題	回顧問題
教學前訪談	1/4	1/4	0/2	0/2
教學後訪談	3/4	3/4	1.7/2	0/2

註：分母是該向度的滿分

（一）教學前訪談，婉伶在解題能力的四個向度表現不佳，與「瞭解問題」能力有關

婉伶是四個個案中，在教學前訪談表現最不理想的。除了本身的數學程度較差外，國文閱讀能力不佳，使得她在「瞭解問題」受挫，連帶影響了她在「解決問題」與「瞭解問題」的表現：

訪：你有想過自己「在教學前訪談」表現不好的原因嗎？

婉：有阿，我國文很爛，很多題目都是看不太懂，所以根本不知道如何下手。

訪：所以如果我幫妳講解這些題目，妳會不會比較會做一點？

婉：可能會吧，至少不會像現在這麼慘…（INT-081024）

不論是 Polya (1945) 或是 Mayer (1992) 的理論，都強調「瞭解問題」的重要性，而上述婉伶因為看不懂題目的敘述，無法瞭解問題，更遑論從解釋題意中發展有效的解題策略。但在探究教學中，婉伶有機會學習紹庭的「繪圖」方式來解題，幫助她「瞭解問題」。

（二）探究教學中，婉伶學習繪圖的解題方式，從中發展符合自己認知基模的解題策略

上述中婉伶的關鍵在於「瞭解問題」。在與紹庭的互動中，她學習到「繪圖」的解題方式，這對她很有助益，因為她不太能理解抽象的東西，但透過繪圖可將題目或是解題方法變得具體，幫助她思考。所以她的解題過程都是先嘗試將問題轉譯成圖形，再由具體的圖形去思考如何解題。如圖7，這個在探究課程中討論的問題，婉伶透過繪圖瞭解題意，並據此假設出未知數：

課程一，複習「以符號代表數」：情人節當天老師請大家吃巧克力，不知道老師帶了多少巧克力來，但從分配完的結果發現，有一位同學只得到3顆，其餘的每一位同學都得到5顆，那麼，你可以透過假設未知數求出有多少同學嗎？（例如假設巧克力有 y 顆）

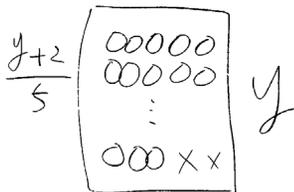


圖 7 婉伶透過繪圖幫助她瞭解題意

除了使用繪圖來瞭解問題，婉伶也藉由繪圖（畫數線）的方式發展解題策略。如圖 8 她在教學後訪談一年齡問題的表現（表 4），婉伶使用畫數線方式，表示出大野郎與小紅帽的年齡差距，並計算每一段的間隔，據此求出大野狼的年齡，可見繪圖的方式，對她在解題上很有幫助：

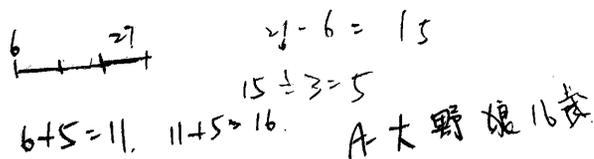


圖 8 婉伶用畫數線的方式解題

訪：妳能用這個單元所學到的假設未知數的方式列出式子嗎？

婉：我覺得這種題目畫圖比較快，且這是我聽得懂的方式，至於假設未知數的方式，我不太會耶…

訪：那其他同學發表不同的解法時，你聽得懂他們的算式嗎？

婉：不懂，且好複雜，我都是用畫圖的方式來解題（INT-081105）

在教學後的訪談，我們也發現繪圖是婉伶僅有的解題策略，所以她無法在「回顧問題」向度獲得分數，雖然跟其他個案比較起來（如：紹庭），她的解題思維顯得單調，然而這卻是她使用自己能理解的，符合她認知基模的方式。從心理學的角度觀之，發展與尋求最適切的解題思維中重要且有意義的事（Mayer, 1992），而探究教學似乎能提供婉伶此方面貢獻。

伍、結論

依據解題能力分析量表，四位個案在探究教學後，解題能力均有所成長（表11）。怡璇（高成就）最大成長在「回顧問題」能力（ $1.7 > 0.3$ ）；紹庭（中成就）主要成長在「瞭解問題」能力（ $4 > 1.3$ ）；雅慈（中成就）在「解決問題」（ $3.3 > 1.3$ ）、「回答問題」（ $1.7 > 0.3$ ）、「回顧問題」（ $1.7 > 0$ ）能力均有獲益；婉伶（中成就）在「瞭解問題」（ $3 > 1$ ）、「解決問題」（ $3 > 1$ ）與「回答問題」（ $1.7 > 0$ ）能力有所成長，但在「回顧問題」能力並無所獲（ $0 = 0$ ）。這似乎蘊含：一、探究教學對中、低成就學生，助益更多（因她們有較大的進步空間）；但二、對低成就學生的檢驗答案與提出合宜的不同解題策略，並無幫助；這或許是因為低成就學生程度較差，解題資源較有限，亦是本項能力涉及設認知能力，需較高層次的思維（Garofalo & Lester, 1985）。

表 11 四位個案解題能力異同

姓名	成就	瞭解問題	解決問題	回答問題	回顧問題
怡璇	高				√
紹庭	中	√			
雅慈	中		√	√	√
婉伶	低	√	√	√	

註：√，主要提升向度。

進一步，我們歸納探究教學如何幫助本研究個案提升解題能力。

一、怡璇

怡璇進步的原因在於改變解題信念，願意使用多元的解題思維，讓她有能力解決原本不會的問題。這是因為小組中其他成員，能展現許多不同的解題思考，並進而解題成功，刺激怡璇嘗試用多元的解題方式。

二、紹庭

紹庭以往受制於傳統教學，無法發展他的另類解題思維，但透過探究教學中的自主探索（臆測）與接受挑戰（論證），有更多精練想法的空間，最後展露最佳的「瞭解問題」與「回顧問題」能力。

三、雅慈

雅慈能夠提升解題能力的原因在於，她常需要幫助紹庭向其他同學解釋紹庭的想法（探究中的論證），因此她不但需要理解紹庭的解題思維，同時也需要能夠使用清楚的語言解釋它，透過這個過程逐漸提升自己的「解決問題」與「回顧問題」能力。

四、婉伶

婉伶的解題能力不佳，但紹庭的畫圖方式，很適合婉伶，她可以透過畫圖解決一些較基本的問題。探究教學對婉伶的幫助在於提供一個發表自己想法的空間（不限制正確答案），並且讓她有機會學習到課本以外的解題方式，進而增進自己的解題能力。

從整個研究來看，開放式的問題、師生與生生間的互動，都是促進學生提升解題能力的因素。Whitin (2006) 提到探究教學對解題能力的幫助，但並沒有清楚說明細節，在本研究中，我們發現探究教學對中低成就的學生有更多助益，因為探究的開放環境中，中低成就學生能夠更自在的發揮自己的解題想法，同時透過相互學習的過程，提升解題能力。

致謝

本研究之完成承蒙國科會的經費支助 (NSC96-2511-S-018-002 & NSC96-2521-S-018-002)，特此申謝。

參考文獻

- 國立教育研究院籌備處 (2006)。國民中學數學課本第一冊。台南市：翰林。
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要。台北市：教育部。
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex.
- Brown, N., Wilson, K., & Fitzallen, N. (2007, November). *Using an inquiry approach to develop mathematical thinking*. Paper presented at the meeting of AARE 2007 International Educational Research Conference – Fremantle, Adelaide, Australia.
- Department for Education and Skills. (2001). *National strategy for key stage 3*. London: DfES.

- Elbers, E. (2003). Classroom interaction as reflection: Learning and teaching mathematics in a community of inquiry. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 77-99.
- Feiman-Nemser, S. (2001). Helping novices learn to teach: Lessons from an exemplary support teacher. *Journal of Teacher Education*, 52(1), 17-30.
- Fellows, M., & Casey, N. (1995). *Mathematics is what mathematicians do*. Retrieved July 1, 2008, from <http://www.c3.lanl.gov/mega-math/gloss/math/doing.html>
- Garofalo, J., & Lester, F. (1985). Metacognition, cognitive monitoring and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163-176.
- Goos, M., & Galbraith, P. (1996). Do it this way! Metacognitive strategies in collaborative mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 229-260.
- Lederman, N. G., & Niess, M. L. (2000). Problem solving and solving problems: Inquiry about inquiry. *School Science and Mathematics*, 100(3), 113-116.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York: Freeman.
- McNeal, B., & Simon, M. (2000). Mathematics culture clash: Negotiating new classroom norms with prospective teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 475-509.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Research Council. (2000). *Inquiry and the national science education standards: A guide for teaching and learning*. Washington, DC: National Academy Press.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), 378-413.
- Staples, M. (2007). Supporting whole-class collaborative inquiry in a secondary mathematics classroom. *Cognition and Instruction*, 25(2), 161–217.
- Szetela, W., & Nicol, C. (1992). Evaluating problem solving in mathematics. *Educational Leadership*, 49(8), 42-45.
- Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 341-359.
- Warfield, J., Wood, T., & Lehman, J. D. (2005). Autonomy, beliefs and the learning of elementary mathematics teachers. *Teaching and Teacher Education*, 21, 439-456.
- Whitin, P. (2006). Meeting the challenges of negotiated mathematical inquiry. *Teaching & Learning: The Journal of Natural Inquiry and Reflective Practice*, 21(1), 59–83.
- Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a functional based approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 125-147.
- Yore, L. D., Pimm, D., & Tuan, H. L. (2007). The literacy component of mathematical

附錄一：探究課程內容

課程	主題	內容	活動範例
一*	準備 探究	<p>(一)藉由討論「數學就是數學家所做的事」(譯自 Fellows & Casey, 1995),讓同學瞭解與學習探究教學的方式。</p> <p>(二)透過探究的方式複習先備知識,「以符號列式」、「一次式的運算」、「一元一次方程式的解法」等內容。活動如下:</p>	<p>1. 圖片會說話。在上面這些天平始終保持平衡,說說看,你觀察到什麼?</p> <p>2. 你所觀察到的現象與解方程式有何關係?</p> <p>3. 試著用上面的結論,來解 $x+2=6$</p>
二	引發 探究	利用有趣的題目,引起學生的探究動機,幫助他們使用探究的方式解一元一次方程式之應用問題。	丟番圖墓誌銘問題(圖1)
三	精緻 探究	提升探究教學活動難度,引導學生進行深度的探究,如對自己的想法提出更清楚說明(論證)與接受更多同學質問。	<p>1. 時鐘(或手錶)是日常生活中常見的物品,你知道時鐘的分針與時針有何關係嗎?</p> <p>2. 想想看 4 點到 5 點間,什麼時候它們會重疊?什麼時候會成直角?(可使用具體物操作)</p> <p>3. 龜每分跑 1 公尺,兔每分跑 12 公尺,龜先跑 20 分後兔開始追,請問兔幾分後會追上龜?</p> <p>4. 討論看看,上述這兩個題目有何關係? (註:題目結構相同)你如何精緻你原來的解法?</p>
四	延伸 探究	學生根據在前幾次的探究成果,提出擬延伸探究的問題,教師從中選擇較具挑戰性或有意義之問題,引導全班學生針對此問題進行探究。	例如紹庭提出丟番圖墓誌銘問題的另類解法(見「發現與討論」中「紹庭的解題表現」)。

註：*, 教學時間依序為課程一，八節；課程二，八節；課程三，八節；課程四，六節。由於學生這些活動討論熱烈，花費許多時間，原本研究者規劃四次課程，每次六節，學生的反應熱烈，超出預期。

附錄二：評量範例—怡璇

教學前訪談—餘數問題 (表 4):

(1) 已知數為每個試場 有幾人, 又會多幾人 共知數是考生有幾人和共
 有幾個
 考場.

(2) 設有 x 個試場 $50x + 80 = 40x + 180$ $10 \times 50 + 80 = 580$ (人)
 $10x = 700$ $x = 10$ (個). A 有考生 580 人
 試場 10 個

設有 x 人 $\frac{x-80}{50} = \frac{x-180}{40} \Rightarrow 40x - 3200 = 50x - 9000$
 5800 $10x$
 $x = 580$ (人) $\frac{580-80}{40} = 10$ (個)

(3) 將數字代進去做驗算, 以結果推回去想。

她先寫出題意；接著分別假設「 x 個試場」與總共「 x 人」，列式進行解題；最後提到如何檢驗答案，但因為錯誤解讀題目的條件，導致答案錯誤，評分如下：

- 一、瞭解問題：2/4 分。大致上瞭解題目，知道要求什麼、以及有哪些條件，但在使用條件列式時出現瑕疵，認為「有 2 個試場僅 40 人」是額外的 ($50x + 80 = 40x + 180$)，不包含在全部 x 個試場中 (正確列式應為 $50(x-2) + 80 = 40(x-3) + 180$)。
- 二、解決問題：4/4 分。以此方式列式沒有問題，問題發生在不夠充分掌握題目條件的關係。
- 三、回答問題：0/2 分。不適合的解題計畫導致錯誤。
- 四、回顧問題：1/2 分。能夠驗算，但無法提出不同的解題方式，兩種算法僅是假設不同未知數，仍是代數解法。

The Influence of Mathematics Inquiry Teaching on Mathematical Problem Solving Abilities: Four 7th Grade Students Case Study

Erh-Tsung Chin¹ Yung-Chi Lin^{1*} Ching-Pei Lin² Hsiao-Lin Tuan¹

¹Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education

²Nantou County Shui Li Junior High School

*b8524039@gmail.com

Abstract

The purpose of this study was to investigate the influence of mathematics inquiry teaching on mathematical problem solving abilities. This study is the case study which involved a high, two middle and a low mathematics achievement students. In analysis of the data of task-based interviews, classroom observations, students' journals and teacher' s journals, the findings showed that the high achiever was able to change her problem solving belief because the other students could solve problems fluently within mathematics inquiry teaching environment. One of the middle achiever performed better abilities of “understanding the problem” and “looking back” from exploration and challenge in mathematics inquiry teaching. The other middle achiever had better the abilities of “solving the problem” and “looking back” through communicating her ideas or the teammate' s ideas. The low achiever developed better problem solving abilities by learning other student' s “drawing strategy” in mathematics inquiry teaching.

Keywords: case study, problem solving, mathematics inquiry teaching