

同分母分數加減法的教學研究

李源順 余新富 李勇諭

臺北市立教育大學數學資訊教育學系

摘要

經過文獻探討後，本研究提出利用概念溝通的表徵模式、分數概念的情境結構、單位分數的內容物問題、整數加減法的語意結構、四則運算的運算結構，配合融入評量理念的全班溝通討論和個別實作等教學方法來培養四年級學生對同分母分數加減法的數學能力和數學威力。研究方法採準實驗研究法，研究對象是桃園縣某國小四年級學生，分成實驗組與對照組，兩班共69人。蒐集的資料包括筆試和教學轉錄，試題採專家效度和內容效度，教學轉錄的信度採三角校正，試題信度使用折半信度。研究結果分析已獲致良好成效。研究結果建議，在教學素材方面，可以運用上述與同分母分數加減法相關的內容幫助學生了解如何連結相關概念，如何運用相關概念進行推理和溝通。進而培養學生的概念性知識、程序性知識和解題性知識。在教學活動方面，應考量學生的學習特性，運用多元優選的教學方法讓學生有獨自解題以及和他人溝通的機會。在評量方面，運用安置性評量、診斷性評量、形成性評量與總結性評量即時了解學生的學習狀況，適時幫助學生獲得數學知能。

關鍵詞：同分母分數加減法、數學能力、數學威力

壹、前言

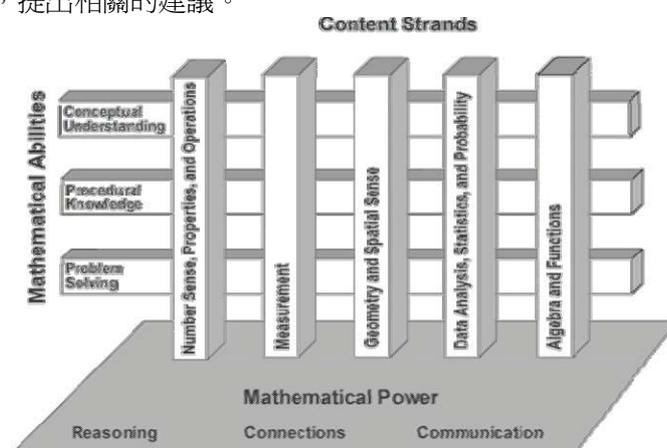
近年來我國的教育改革變動快速。2000年教育部(2000)公佈的九年一貫數學學習領域暫行綱要，編輯委員站在國民教育為大眾教育的立場，強調應該讓80%的學生能夠學會，能力較好的學生則可以補充額外的教材；加上制度的變革，使得數學學習領域的上課時數比以前少（據分析，最多每周從六節變為四節），因此數學課程比八二年版甚至六四年版慢了一點。此舉讓一些關心國家競爭力的學者感到憂心。學者的分析發現，暫行綱要的課程比美國加州課程慢了一至兩年的時間，同時，暫行綱要中的能力指標只要在二至三年的時間學習完畢即可，同時也沒有完整的內容說明，例如能力指標「N-2-6：在具體情境中，能以假分數或帶分數描述具體的量，並能解決分數的合成、分解以及簡單整數倍的問題。」只要在國小四到五年級完成，同時指標並沒有內容說明。加上學者對坊間所謂建構式教學的疑慮，使得數學學習領域課程綱要修訂的編輯委員大幅異動。至2003年教育部(2003)公佈九年一貫數學學習領域課程綱要，其內容與暫行綱要的內容差異可謂相當大。依據研究者的比對，課程綱要的內容比課程暫行綱要的內容多了許多，且有些內容的教學時程又提前一至兩年的時程，例如有關分數除法的教學課程暫行綱要放在七年級，課程綱要則放在六年級，兩者相差了一年。兩者之所以有如此的差距，是課程綱要的編

輯委員考慮到國際競爭力的問題，因此把數學教材的難度提升到前五、六成學童學習為主(民生報，2003)，其他的學生則建議利用補救教學幫助學生學習。

國科會爲了因應此一課程改革，認爲應有實徵的研究來支持國家課程的訂定，因此推動各數學單元的詮釋計劃。希望能開發各單元的教學素材、教學活動、以及評量建議，做爲課程改革的實徵資料與建議依據。

本研究在整個詮釋計劃的帶領下，負責分數四則運算單元的詮釋研究。本文則是有關同分母分數加減法的相關研究成果。

本研究分析國內外相關教育與評量文獻(NAGB, 2002; 教育部, 2000, 2003; 陳竹村、林淑君和陳俊瑜, 2001; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002; Lesh, 1987)，發現同分母分數加減法的教學素材與評量，應著重表徵、單位分數的內容物、情境結構、語意結構和運算結構等數學內容，強調概念性知識、程序性知識與解題性知識等數學能力的培養，以及推理、連結、溝通等數學威力的培養。因此，我們設計了相關的教學活動進行教學實驗，探究其教學成效，再對本研究的結果分析，提出相關的建議。



貳、研究目的

經過文獻探討後，本研究的目的是在設計一份兼具數學內容知識(即單位分數內容物、表徵、情境結構、語意結構、運算結構)的同分母分數加減教案並進行教學實驗，探究這個教學實驗培養學生的數學能力(即概念性知識、程序性知識與解題性知識)，與數學威力(即推理、連結與溝通)的成效。同時，與傳統講述教學法進行比較。最後提出相關的研究建議。相對於本研究目的，本研究欲探究的問題如下：

1. 實驗組與對照組之間分別在前測、後測與延後測的數學能力與個別試題的表現是否有顯著差異？其差異為何？
2. 實驗組學生的連結、溝通、推理等數學威力是否有進步？

最後，本研究依據教學設計與實驗結果提出對教學素材、教學活動與教學評量的建議。

參、文獻探討

本研究探求可以做爲教學設計理念的文獻，發現美國National Assessment of Educational Progress [NAEP](NAGB, 2002) 從1996年起到2000年、2003年的數學教育成就評量，就提出數學威力(Mathematical Power)、數學能力(Mathematical Abilities)、數學內容(Content Strands)三個向度的評量架構(參見圖一)。雖然它是一個評量的架構，但也適合做爲教學的架構，因此，我們以此架構爲基礎，做爲探究同分母分數加減法的教學實驗理念架構。

圖一 美國NAEP 的數學評量架構圖

一、數學威力

現今數學教育的理念是要培養學生的數學威力(Mathematical Power)，因此，美國NAEP(NAGB, 2002) 在1996年之後的評量架構增列了此一向度。此一向度的內涵，在我國九年一貫數學學習領域課程暫行綱要和課程綱要(教育部，2000，2003) 中也可以看到。

美國NAEP(NAGB, 2002) 認為數學威力是學生有全面性的能力能結合和使用數學知識去進行探究、臆測、邏輯推理、解決非例行性的問題；能進行數學的溝通；以及能在數學脈絡之內，或其他的學科脈絡進行連結。因此，NAEP(NAGB, 2002)認為數學威力是由推理(Reasoning)、連結(Connections) 和溝通(Communication) 三個因子組成。依據National Council of Teachers of Mathematics[NCTM](2000) 的學校數學原則與標準(Principals and Standards for School Mathematics)，推理是指學生能認知數學的基本內容，能進行探究與數學臆測，能發展對數學論證的評價，以及能選擇使用不同的推理和證明方法。連結是指學生能理解並進行數學概念間的連結，能了解數學概念是環環相扣的體系，以及能在數學外的領域辨認和使用數學。溝通是指學生能透過溝通強化數學思維，能和同學、老師及他人溝通他們的數學思維，能分析和評估他人的數學思維和策略，以及能使用數學語言表達他的數學概念。

本研究認為培養學生的推理、連結和溝通能力不是短暫時間內可以達成的，它需要持久的進行。同時，最好能在班級的數學教學過程中持續進行，而不是只有在非正規的數學課室中進行。因此，我們將探求一種可以在數學課室中培養學生數學威力的教學脈絡。

二、數學能力

美國NAEP(NAGB, 2002) 認為數學能力可以看成學生在特定的數學知識內展現他的數學能力。數學能力指的是概念性了解(Conceptual Understanding)、程序性知識(Procedural Knowledge) 和解題(Problem Solving) 三個因子。我國大學入學考試中心(林福來，1994)在進行學生試題分析時也採用此一數學能力做為分析的向度。依據NAEP(NAGB, 2002) 的詮釋，概念性知識的了解是指學生能辨識以及利用模型、圖形、或符號等不同方式來表達某一數學概念，或是舉出此概念相關的例子或是反例作為說明；此外學生能知道一些數學原理（如加法原理、乘法原理）並將原理間做相互連結、比較、以及整合應用。程序性知識是指學生能在計算的過程中，選擇適當的程序並正確解題；同時，能用模式或符號來檢驗所使用的程序是否正確。解題性知識是指學生能從資料中逐漸辨識並形成問題；能瞭解這些資料的充分性與一致性，並能運用相關知識、推理能力，以及採取適合的策略，來找出答案；同時，學生能驗證這些答案的合理性與正確性，並將之推廣。

本研究同樣認為學生數學能力的培養不是短暫時間內可以達成，它需要持久的進行。同時，最好能在班級的數學教學過程中持續進行，而不是只有在非正規的數學課室中進行。因此，我們將探求一種可以在數學課室中培養學生數學能力的教學脈絡。

三、數學內容

美國NAEP(NAGB, 2002) 所強調的數學威力與數學能力都和數學內容知識息息相關。因為數學內容知識包括數感、性質與運算，測量，幾何與空間，資料分析、統計與機率，以及代數與函數等範疇，本研究無法全部顧及，只能聚焦在數感、性質與運算範疇中的同分母分數的加減法的內容知識方面。

本研究為了對同分母分數的加減運算做適切的詮釋，除了找尋文獻中相關的研究之外，也探究相關的書籍和學者的觀點，了解應如何進行教學設計。(一)概念性了解

在同分母分數加減法的概念性知識方面，本研究認為應該連結學生的舊經驗--分數概念，讓學生了解同分母分數加減法的概念性了解是運用分數相關概念以及表徵來進行溝通。此時才能夠培養學生同分母分數加減法的概念性了解的數學能力。同時，培養學生類化分數加減法概念為其它概念的學習，培養學

生了解如何連結既有概念與新概念、利用既有概念進行學習新概念的數學推理、以及利用既有概念溝通新概念的數學威力。

1.單位分數的內容物

在分數概念的內涵知識方面，暫行綱要(教育部，2000) 的能力指標說明「N-1-7: 在等分好、整體1 能明顯出現之具體生活情境中(包含連續量、離散量)，能以真分數(分母在20 以內)描述內容物為單一個物的幾份，並能延伸真分數的意義，進行同分母真分數的合成、分解活動(和 <1)。」「N-2-5: 在等分好、整體1 能明顯出現之具體情境中，能以真分數來描述單位分數內容物為多個個物的幾份，進行同分母真分數的合成、分解活動。」它的意思是分數的概念性教學應融入單位分數內容物為單一個物和多個個物的問題。本

研究認為分數概念的理解相當困難，因為它是一種比例概念，例如， $\frac{3}{4}$ 之意

是任何物件將它平分成四份，其中三份和整體的比例關係；分數概念也可以是所有物件的 $\frac{3}{4}$ ，例如 $\frac{3}{4}$ 個蛋糕(含一個蛋糕平分成四、八...份，其中的三、六...份)、 $\frac{3}{4}$ 盒雞蛋(含一盒雞蛋有四、八...顆，其中的三、六...顆)...等，所

成的集合的類(class)的概念。為了讓學生從具體的分數量概念逐步抽象化為分數的數概念，本研究認為從內容物學習分數概念是非常重要的，因此本研究將針對單位分數的內容物方面，區分為單一個物、多個個物與未指明內容物進行教學。

2.情境結構

從學者們(Behr, Harel, Post. & Lesh, 1992 ；教育部，2000，2003; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002) 的分析，分數概念的教學情境結構可以分成一維連續量、二維連續量、離散量等情境。所謂一維連續量指一條繩子、緞帶、彩帶... 等在還沒分割前是一個整體的一維物件。二維連續量指蛋糕、披薩...等在還沒分割前是一個整體的二維物件(一般我們在畫圖時，都把蛋糕、披薩...等等用平面的圓形或方形替代)。離散量指一盒雞蛋有十顆...等一開始即以離散的方式存在的物件。依據研究者的詮釋，連續量情境是學生學習分數概念的合理情境(一般分數概念都會先從二維連續量入手，一維連續量又可以連結到數線概念)，離散量則是讓學生連結整數除法與分數概念(即分數表示兩整數相除的結果)的合理情境。因為整數除法的啟蒙大都是離散量的情境問題，若在同分母分數加減法仍加入離散量情境，將來學生學習整數除以整數結果為分數的問題時，將更容易接受。因此，這些情境結構在同分母分數加減法的佈題上，我們認為有其重要性，應延續採用。

3.表徵

表徵是將不同事物以不同種類的符號來代表的歷程。就認知心理學的訊息處理角度來看，是指訊息處理的過程中，將訊息編碼轉譯成另一種形式，以便處理的歷程(張春興，1989)。學者(Bruner,1966; Lesh, Post, & Behr,1987; Kaput,1987; Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Greeno, 1987; 蔣治邦, 1994) 曾從不同的角度，對表徵加以區分。本研究認為表徵的應用應該著重在概念性的溝通上，因此採用Lesh 等人(1987) 的表徵分類：實物情境、具體操作物、圖像、口語、書寫符號。Lesh 等人(1987) 的表徵分類可以讓學生經由實物情境、具體操作物、圖像等具體情境與人溝通分數加減法的概念性知識，再慢慢抽象化為口語、書寫符號等表徵。我國九年一貫課程暫行綱要的編輯學者們(教育部，2000) 認為實物情境與具體物操作適合低年級學生，當學生進入高年級以後已可以經由圖像表徵進行學習。

從學者們(教育部，2000，2003; 謝堅、蔣治邦和吳淑娟, 2002) 的分析發現，在上述內容物與情境

結構之上，對分數概念的口語、書寫符號等表徵可

以區分為三種。以 $\frac{3}{4}$ 盒蛋糕為例，可以從部份／全體的觀點說成「把一盒蛋

糕平分成4 份，其中的3 份」，可以從單位分數計數的觀點說成「3 個 $\frac{1}{4}$ 盒蛋

糕」，也可以從強調單位量的觀點說成「一盒蛋糕的 $\frac{3}{4}$ 」。至於圖像表徵方面，



可以使用

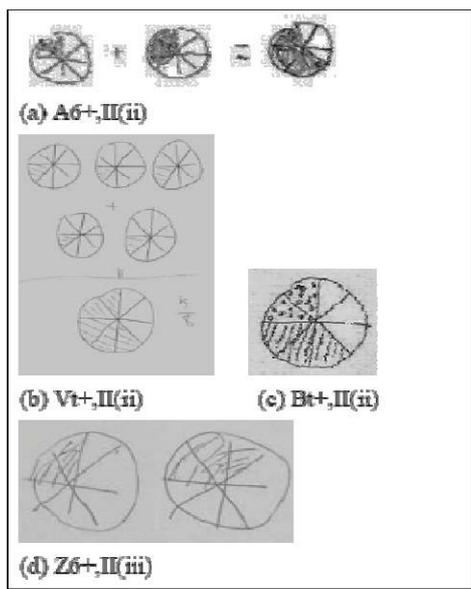
「」等方式來表徵。

·
·

在研究上，Cramer & Henry(2002) 在「有理數計劃(Rational Number Project)」中，利用操作具體物或圖像表徵幫助四、五年級的學生了解分數加減法的概念。龐嘉芬(2001) 利用情境結構、內容物和表徵等問題情境，問卷調查五、六年級學童的分數加減法成就。Herman, Ilucova, Kremsova, Pribyl Ruppeldtova,

Simpson, Stehlikova, Sulista(2004) 探究19 個六到九年級的學生在解答 $\frac{2}{8} + \frac{3}{8}$ 時，一開始浮現在他們心中的是什麼。研究發現大部份學生的心像是使用圓形的表徵(參見圖二)。本研究(李源順，2005) 對390 名小三學生的實徵調查，發現學生對問題「請你用圖形或文字說明 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ 的結果」，能使用圖形表徵或

文字、符號表徵回答問題的學生有30.8% ，同時運用圖形表徵的學生有30.1% ，顯示學生喜歡使用圖形表徵回答概念性問題。此外林碧珍(2000) 和呂玉琴(1991a, 1991b, 1993) 都曾對學童的分數概念，包括單位分數的內容物、表徵等進行探究。



(二)程序性知識程序性知識的教學與評量也是重要的一環。我國九年一貫數學領域的編輯委員(教育部, 2003)認為「數學運算或計算並不只是機械式計算操作而已。所謂能熟練數學的運算或計算,係指在能夠理解數學概念或演算規則的情況下,所進行的純熟操作。這種透過理解並能將觀念與計算結合的能力,才是演算能力。某類型數學問題演算的純熟,常能同時促使新舊數學觀念的連結與落實。演算亦是學童獲得新數學經驗的方法,新的經驗將會再形成學生下一階段新主題學習所需的具體經驗。」

圖二 同分母分加法的表徵

學者們(楊壬孝, 1987, 1988, 1989; Lukhele, Murray & Olivier, 1999) 的研究,發現學童對同分母加減法的答對率不是很理想。楊壬孝(1987, 1988, 1989) 的研究

發現,小五學生做 $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} =$ 的答對率71%, $1\frac{1}{5} - \frac{3}{5} =$ 的答對率55%。Lukhele,

Murray & Olivier(1999)調查95 位五、六年級學生發現, $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$ 的答對率13.6%,

學生所犯的錯誤是分母加分母、分子加分子,以及把所有的數相加。本研究(李

源順, 2005)的問卷調查發現,對 $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} =$, $\frac{17}{50} + \frac{28}{50} =$ 等問題的答對率65%。

學童的主要迷思概念是出現分母加分母與分子加分子的概念性迷思，約20%。

少部份學生只取分子相加，例如， $3/6+2/6=2+3=5$ ；或看成小數相加，例如，

$3/6+2/6=6.3+6.2=6.5$ ；或將所有數字相加，例如， $3/6+2/6=3+6+2+6=17$

，等概念性迷思。(三)解題性知識



Vt+,II(ii)



(c) Bt+,II(ii)

本研究從文獻中探求分數加減法問題解題性知識的相關研究，發現這方面的研究不多。黃俊惟(2002)利用網路對學生進行分數加減法問題的擬題與解題進行探究。王瑞慶(2002)利用紙筆評量對國小六年級學童在分數加減法問題的解題行為進行探究，他將問題分為同分母和異分母等六類。周柏達(1998)曾問卷調查六年級學生在分數概念、計算、例行性文字題和非例行性問題的學習表現。

有學者(Fuson, 1992；謝堅、蔣治邦和林淑君，2002)對整數加法的文字題進行有系統的語意結構進行分類，但對分數加減法文字題的語意結構進行分類就沒有看到。

1.語意結構

學者(Fuson, 1992；謝堅、蔣治邦和林淑君，2002)將整數加減法文字題的語意分類為四種基本的型態：

- 合併型(Combine)：例如，小明有7顆糖果，小華有8顆糖果，請問兩人合起來共有幾顆糖果？
- 改變型(Change)：例如，小明有5顆糖果，小華給了他3顆糖果後，小明現在有幾顆糖果？
- 比較型(Compare)：例如，小華有3顆糖果，小明比小華多6顆糖果，請問小明有幾顆糖果？
- 平衡型(Equalze)：例如，小明有7顆糖果，小華有8顆糖果，小明再多幾顆糖果就和小華一樣多？

Morales, Shute, Pelligrino(1985)針對三年級與五、六年級在不同的整數加減題型研究中發現，最簡單的是改變型問題，最難的是比較型問題。

語意結構的區分也影響著我國教育，如在82年版(謝堅、蔣治邦和林淑君，2002)以及課程綱要(教育部，2003)的整數數學教材中，都將整數文字題的語意結構區分成改變型、合併型、比較型、與平衡型等四類問題。但有學者(陳竹村、林淑君和陳俊瑜，2001)的見解認為學生先前「在整數加減問題的經驗累積，使得學生已將這些問題(併加型、追加型、加法標準算式填充題等等)歸納為加法問題，故在分數加法問題中已不須要再分為併加型、追加型等」。

本研究認為整數加減法的語意結構也應該做為學習同分母分數加減法，甚至小數加減法的解題性知識的分類結構。本研究的實徵調查(李源順，2005)發現，三、四年級學童對同分母真分數加減法的比較型問題與平衡型問題的答對率仍然低。同時，站在學科內連結的角度，我們認為學習應該有它的發展性與延續性。因此除了從分數概念的內涵物的特性區分之外，也應該從語意結構做為區分，讓在低年級時未能充份了解比較型問題與平衡型問題的學生能在較高的年級有機會再一次學習。讓學生了解同分母加減法問題的題型和他先前所學的整數語意結構相同，而進行整數加減法與分數加減法解題之間連結，讓學生可以利用舊經驗來進行問題的溝通與推理。

2.運算結構

課程綱要(教育部，2003)在分年細目2-a-2中提到「當學生具有充足的學習經驗之後，教師可引入如被加數未知、被減數未知等不同題型之算式填充題，

讓學生列式並解釋式子和題目之間的關係」。算式填充題「主要為發展兒童列式之能力，問題中之數量、情境描述應配合學生的認知發展。」有關算式填充題可以區分為被加(減)數未知、加(減)數未知以及和(差)數未知三種情形。也有學者(教育部, 2003) 將上述數的名稱改為量的稱呼，在改變型問題稱為起始量未知、改變量未知以及結果量未知；在合併型問題稱為部份量未知和總量未知；在比較型和平衡型問題稱為參考量未知、比較量未知以及差異量未知；等三種情形。本研究把它們稱為加減法的運算結構。

本研究的實徵調查(李源順, 2005) 發現，當文字題融合語意結構和運算結構時，尤其是比較型問題，配合被加(減)數和加(減)數未知的問題，學生的解題難度增加。本研究對45

390 名小三學生的問卷調查發現，問題「爸爸拿一條塑膠繩綁圓形和方形的禮盒，他用

96

18
條塑膠繩綁圓形禮盒，綁圓形禮盒的塑膠繩比綁方形禮盒的塑膠繩長 條，請問爸爸用

96

多少條塑膠繩綁方形禮盒？」的答對率只有26% ，且有46% 的學生犯了使用加法運算的解題性迷思。因此，我們將融合語意結構和運算結構的文字題的解題稱為同分母加減法的解題性知識問題。學生需能在此變因之下順利進行解題才具有解題性的知識。此外，我們從現今的教育理念得知學生應具有解答多餘資訊問題的能力，因此本研

究將適度放入一、兩題相關問題，以了解學

生的解題能力。

四、小結

現今的教育除了重視數學知識的學習之外，也強調數學能力和數學威力的培養，也就是說希望學生能運用概念性知識和程序性知識來解題之外，也強調學生在能運用數學進行推理、溝通並進行與生活、數學內和數學外的連結。

文獻探討發現，同分母加減法的概念性知識和解題性知識的學習，可以經由相關概念的連結來達成，例如單位分數的內容物問題、分數的情境結構、概念溝通的表徵、加減法的語意結構、四則運算的運算結構等相當清楚。我們也認為學生在連結相關概念的同時也慢慢的在培養他的推理與溝通能力。

但是文獻中我們並未發現結合相關概念的研究，因此，本研究欲研擬一套教案進行教學實驗，並對實驗結果提出適當的建議。

肆、教學實驗設計

本研究的理念是想在正規的數學課室中培養學生的數學知識、能力和威力，就是要讓學生了解各個概念的學習和解題並不是無中生有，而是連結既有相關概念，並運用既有概念進行推理和溝通。因此，我們依據分數概念的單位分數內容物分類與情境結構、整數加減法的語意結構、四則運算的運算結構，以及概念溝通的表徵進行同分母分數的加減法概念的教學素材設計與評量試題設計。

在教學活動設計方面，我們將評量的理念融入全班溝通討論與個別作的教學過程之中。活動一：先複習學生舊經驗的安置性評量，亦即先利用不等份的二維連續量的圖形表徵檢驗學生是否了解分數的重要概念之一--等分概

念。之後帶出利用二維連續量等分成

四份中的三份的圖像表徵，帶出 $3/4$ 個蛋糕的符號表徵，以及口語、文字表徵的概念性知識 – 一個蛋糕等份成四份其中的三、三個 $1/4$ 、以及一個蛋糕的 $3/4$ 。爲了強化分數的另一

個概念性知識 – 單位量，本研究再畫出兩個蛋糕的圖像表徵，每個都等分成八份，其中一個塗三份，另一個塗四份。詢問學生有顏色部分共是幾個蛋糕？目的在於診斷學生是

否存在著 $7/16$ 個蛋糕的迷思。

活動二：開始新概念的學習。佈題一利用內容物爲多個個物的離散量、改變型、差未知的減法問題：「一盒果凍有10顆，小娟吃了 $3/5$ 盒，還剩下多少盒？」以及「一盒果

凍有20顆，小娟吃了 $3/5$ 盒，還剩下多少盒？」上述問題主要讓學生能了解內容物的多寡

並不會影響分數的結果，強化學生的分數概念。佈題二爲隱含內容物的一維連續量、合

併型、和未知加法問題：「小王用去 2 又 $3/5$ 公尺，小明用去 1 又 $4/5$ 公尺，請問2人共用去多少公

尺的彩帶？」佈題三爲有多餘資訊、隱含內容物、一維連續量、改變型、減數未知減法

的問題：「爸爸用21公尺長的繩子綁曬衣架，曬衣架高度是 1 又 $13/25$ 公尺，綁完後，繩子剩

下 5 又 $11/25$ 公尺，請問爸爸綁曬衣架用去多少公尺長的繩子？」佈題四爲內容物爲多個個物

的離散量、平衡型、加數未知的減法問題：「一盒巧克力有16顆，弟弟有 1 又 $3/8$ 盒巧克力，

哥哥有 4 又 $6/8$ 盒巧克力。問弟弟再多幾盒就和哥哥一樣多？」這些問題主要是運用全班溝通

討論與個別實作的方式進行教學，讓學生利用圖形表徵、口語表徵與符號表徵進行概念連結、推理、溝通，並在多元的解題策略間進行連結。例如，讓學生了解解題策略與內容物之間的關聯，利用分數概念的口語表徵與圖形表徵進行概念溝通，分數加減的語意結構可以利用舊有整數加減法語意結構的問題來進行解題。本研究之所以沒有採用小組合作學習的教學，主要是因爲進行實驗的學校是一所傳統的學校，學生間很少進行小組溝通討論。因此我們先採用全班溝通討論的方式進行教學，等學生了解如何進行概念的溝通討論之後，再將全班溝通討論的模式導入小組進行合作學習。此外爲了培養學生的解題能力與程序性演算能力，也適度佈一些練習題，讓學生進行練習。

活動三：主要在課堂上進行新概念教學的形成性評量，藉此檢核學生是否形成新概念。佈題一爲隱含內容物、一維連續量、比較型、差未知的減法問題：「大吉大利分別用

去 $1\frac{8}{12}$ 公尺與 $2\frac{3}{12}$ 公尺長的緞帶布置教室，問大吉比大利共用去多少公尺的緞帶？」佈

題二為沒有內容物的離散量、改變型、減數未知的減法問題：「姊姊原有 $13\frac{3}{7}$ 包貼紙，她分了一些給妹妹後，剩下 $1\frac{4}{7}$ 包貼紙。請問姊姊給妹妹幾包貼紙？」主要是利用個別實作

與全班溝通討論的方式進行教學評量以及解法之間的連結。

相對於實驗組的教材設計，對照組的教學素材採用91年某教科書四年級下學期的同分母分數加減法的內容。經訪談對照組教師，他的教學是按照教科書內容進行教學活動，並未特別思考該單元的教學目標，同時教學時強調學生計算的熟練程度。

伍、研究方法與過程

本研究的研究方法採準實驗研究法，分成實驗組與對照組。研究樣本為桃園縣一所鄉村學校的四年級學生共兩班學生，人數共計69人；其中，實驗組共35人，對照組共34人。該校的編班方式採用常態編班，實驗組由第二研究者借其中一班進行任教。第二研究者在中年級任教3年，總年資8年。由於該校的教學偏向傳統教學方式。因此，研究者在教學時採用學生較能接受的全班溝通討論和個別實作的方式，以培養該班學生的溝通、推理和連結能力。對照組由該班教師親自教學，偏向講述方法進行，該班老師在中年級任教5年，總年資7年。兩組的教學時數相同，都是5節。

在教學實驗的評量試題方面，本研究依據上述的教學理念進行教案設計與試題設計，然後觀察實驗組的教學，並與對照組進行實驗結果的比對分析。前測、後測與延後測均使用同一份試題，以便比較學生的學習成效。前測在教學實驗前進行，主要的目的在瞭解兩班學生教學前的程度差異，也在瞭解學生還未正式學習分數加減問題時的表現。後測在教學完畢一週後實施，主要在瞭解學生的學習成效。延後測在教學完畢五週後實施，主要目的在於檢驗學生的學習是有否具保留成效。由於依據上述理念所含蓋的變因（情境結構、語意結構、運算結構和加減法）可以設計出許多不同類型的問題（至少 $3\times 4\times 3\times 2=72$ ），因此本教學實驗所設計出來的教案與試題的題型幾乎都不同，正可以檢驗學生數學知識的習得，以及數學能力和數學威力的學習成效。為了讓學生有充份的時間進行評量，試卷設計總題數為15題。其中Q1~Q7為程序性知識問題的計算題，包括整數與帶分數加減以及帶分數加減需進退位等題型。Q8~Q14為解題性知識的應用題，包含內容物、情境結構、語意結構和運算結構的問題。Q15為概念性表徵題，主要在探究學童是否能用文字或圖形表徵說明其對同分母分數加減的概念性了解。

由於本研究的試題經過上述的內容分析之後，再進行設計。所以各個題型有其目的與意義，所以試題具有內容效度。同時，試題也經由專家學者與學校教師的充份討論，因此有專家效度。

分析的資料主要有筆試和教學錄影。在筆試方面，將學生三次測驗結果加以編碼分類後，利用統計軟體SPSS10.0中文版，分析教學成效。前測、後測與延後測結果所測得之折半信度（Split half Reliability），經由斯布公式(Spearman-Brown Formula)校正之。折半信度之積差相關係數為.6446，斯布校正係數為.7032之間，信度頗高。在教學錄影部份，我們將它轉成書面資料，再加以分析，並請多位研究者共同檢驗，以確認其信度。

陸、教學實驗結果

本研究從實驗組與對照組的前測、後測與延後測的總成績與個別試題做比較，實驗組在三次測驗中的差異，以及學生在教學中的表現，了解本研究的教學成效。

一、數學能力的表現

在前測方面，從表一可以發現，實驗組學生和對照組學生在試題的數學能力整體表現，或者在概念性知識、

程序性知識和解題性知識等數學能力的分項答對率相差0%-10% ，都沒有顯著差異，且對照組略優於實驗組。顯示兩組學生在實驗前的成就表現沒有太大的差異。

表一實驗組與對照組三次測驗總體答對率

測驗 組別	前測		T 值	後測		T 值	延後測		T 值	對 照 組	實 驗 組
	對 照 組	實 驗 組		對 照 組	實 驗 組		對 照 組	實 驗 組			
數學能力	58%	52%	.956	73%	82%	-2.357*	74%	83%	-2.098*		
概念性知識	36%	30%	.219	49%	82%	-3.036*	47%	79%	-2.772*		
程序性知識	55%	55%	.029	71%	82%	-2.334*	75%	84%	-2.017*		
解題性知識	60%	50%	1.383	74%	83%	-1.552	74%	82%	-1.615		

* P<.05

教學實驗之後，從表一可以發現，實驗組學生和對照組學生在後測和延後測的數學能力整體表現以及概念性知識和程序性知識答對率相差9%-33% ，實驗組的答對率均優於對照組且有顯著差異，只有在解題性知識方面未達顯著差異，但實驗組的答對率高於對照組8%-9%。若和前測的進步情形相比，實驗組進步了32%-33% ，對照組進步了14% 。顯示實驗結果在數學能力整體表現與概念性知識、程序性知識和解題性知識都有相當好的成效，尤其是對同分分數減的概念性知識的表徵溝通上，實驗組比對照組進步更多，兩組相差32%-33% 。

實驗結果發現，實驗組在延後測時，對概念性問題的表現沒有到達80% ，但後測的答對率也有82%。所以我們可以這麼說，本實驗結果，實驗組學生的總體表現與各項數學能力表現都已達九年一貫暫行綱要編輯委員的期望 – 亦即有80% 的學生能夠學。對照組學生在概念性知識的答對率較低，不到50%，在數學能力總體表現、程序知識和解題性知識的答對率則在71%-75% 之間。

二、個別試題表現

為了解實驗組和對照組學生在結合內容物、情境結構、語意結構和運算結構問題的學習表現，我們首先針對有顯著差異的題目進行分析。

表二兩組學生在個別試題的答對率

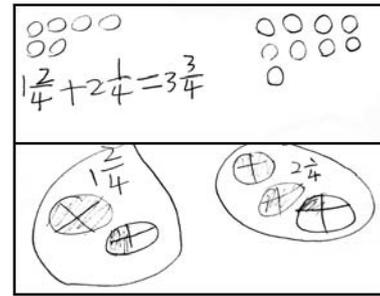
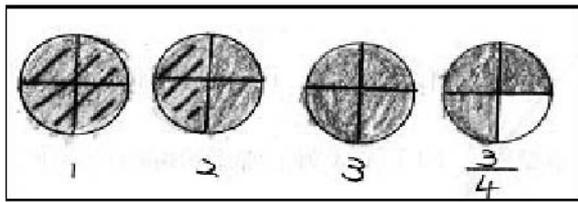
施測	試題	對照組	實驗組	T 值
前測	Q14: 爸爸原有 $5\frac{3}{10}$ 箱橘子，後來大伯又給了爸爸一些橘子後，爸爸總共有 $7\frac{4}{10}$ 箱橘子。請問大伯給了爸爸幾箱橘子？	85%	50%	3.100*
後測	Q7: $32\frac{81}{91}-5$	69%	91%	-2.365*
	Q12: 爸爸原有 $4\frac{45}{100}$ 公尺長的繩子，綁籬笆用去了 $3\frac{45}{100}$ 公尺，請問剩下多少公尺？	60%	85%	-2.361*
	Q15: 請你用文字或圖形說明 $1\frac{2}{4}+2\frac{1}{4}$ 的結果。	49%	82%	-3.036*
延後測	Q6: $8-8\frac{1}{2}$	44%	73%	-2.437*
	Q15: 請你用文字或圖形說明 $1\frac{2}{4}+2\frac{1}{4}$ 的結果。	47%	79%	-2.772*

* $P < .05$

從表二可以發現，在前測方面，除Q14 對照組優於實驗組且達顯著差異外，其餘並無顯著差異。分析發現，Q14 為沒有內容物的離散量、改變型、加數未知的減法問題。實驗組學生有50% 能正確解題，空白未計算者佔全班46.7% ，其餘錯誤佔3.3% 。對照組有84.8% 能正確解題，其餘錯誤佔15.1% 。經與兩班老師訪談討論發現：實驗組學生在面臨未接觸問題時，會因為不確定應該如何計算，而有空白未計算的情形。而對照組學生則因在該班老師平日要求無論會不會解題，一定要將試卷上的題目寫完，而有猜題的情形發生。本教學研究在後測和延後測時，特別針對此一現象進行觀察，發現兩組學生沒有答題的人數已明顯減少，因此對後測與延後測的結果分析比較沒有影響。

在後測方面，除了Q7、Q12 、Q15 三題實驗組優於對照組且達顯著差異外，其餘題目並無顯著差異。其中Q7 為帶分數減整數的程序性計算題。實驗組的答對率為90.9% ，主要錯誤為程序性迷思，即計算錯誤。對照組學生的答對率為68.6% ，最主要錯誤型態為概念性迷思，即帶分數減整數時，將被減數的分子與減數直接相減，佔8.6% ；其餘為程序性迷思，如計算錯誤等。Q12 為隱含內容物的連續量、改變型、差數未知的減法解題性問題，實驗組學生的答對率為84.8% ，主要錯誤類型為程序性的迷思，即計算錯誤，有1 ；對照組學生的答對率為60.0% ，主要錯誤類型同樣為程序性的迷思，佔37.1% 。Q15 為概念性知識的表徵題，能正確使用文字或圖像表徵說明概念的實驗組學生，佔2 ；錯誤的圖像表徵佔18.2% 。能正確為用文字說明或表徵的對照組學生佔40% ；直接列式計算回答，或使用錯誤的圖像表徵，佔52.7% 。圖三為學生正確答題與錯誤答題之圖例。

正確圖例錯誤圖例



圖三 學生對概念性表徵題的答題舉隅

與前測相較，Q14 雖未達顯著差異，但實驗組學生的答對率從50%上升至88%，提高了33%；對照組學生的答對率從85% 上升至97%，提高12%。可見透過實驗教學後，實驗班的學生確有顯著的進步。

在延後測方面，除Q6、Q15 實驗組優於對照組且達顯著差異外，其餘題目並無顯著差異。Q6 為整數減帶分數的程序性計算題，實驗組學生的答對率為72.7%，主要錯誤為

概念性迷思：只用整數減去帶分數的整數部分($8 - 2\frac{1}{8} = 6\frac{1}{8}$)，佔21.2%。對照組學生的答對率為43.8%，主要錯誤型態為概念性迷思：也是只用整數減去帶分數的整數部分，佔

34.4%。Q15 為概念性知識的表徵題，能正確使用文字或圖像表徵說明概念的實驗組學生佔78.8%；主要錯誤為未作答，佔6.1%；只用列式解答或是使用錯誤的分數圖像表徵，佔6.1%。能正確使用文字說明或表徵的對照組學生佔43.8%，主要錯誤為只用列式解答，佔21.9%；或是使用錯誤的分數圖像表徵，佔12.5%。

再從表三實驗組在各個試題後測與延後測的答對率看，發現本研究結果，實驗組學生在所有題目的答對率均超過五、六成，也就是符合課程綱要編輯委員的期許。如果以暫行綱要編輯委員的期望80%而言，後測與延後測的答對率均低於80% 的試題有Q4：

$5\frac{1}{8} - 2\frac{5}{8} =$ 、Q6： $8 - 2\frac{1}{8}$ 與Q10：「班上舉辦喝汽水比賽，比賽計時2 分鐘。小明喝了3又2/8

888 8

罐汽水，但是小明比小華多喝了1/8罐汽水，請問小華喝了多少罐汽水？」的表現較為不

理想；Q13：「有一袋花片，紅色花片有48/79袋，黃色花片再多13/79袋就和紅色花片一樣多。

請問黃色花片有幾袋？」的答對率為79%，已相當接近；其餘試題均有80%以上的答對率。

Q4 是屬於同分母帶分數相減，需退位的問題。實驗組學生普遍犯了程序性迷思，也就是以分數加法的方式來求分數減法或計算錯誤，佔15%-27%；以及概念性的迷思，也就是分數相減時，大整數減小整數和大的分子減小的分子，佔3%-9%。Q6 是整數減帶分數需退位的計算題，實驗組主要犯了概念性迷思，也就是整數只與帶分數的整數部分相

減($8 - 2\frac{1}{8} = 6\frac{1}{8}$)，佔21%-27%。

表三實驗組在前測、後測與延後測的個別題目答對率比較

試題類型	題目	前測	後測	延後測	題型分析
------	----	----	----	-----	------

程序性知識	Q1	90%	100%	94%	真分數加真分數
	Q2	63%	79%	88%	帶分數加帶分數，進位
	Q3	70%	85%	88%	真分數減真分數
	Q4*	30%	67%	76%	帶分數減帶分數，退位
	Q5	57%	88%	88%	整數加帶分數
	Q6*	23%	64%	73%	整數減帶分數，退位
	Q7	53%	91%	85%	帶分數減整數
解題性知識	Q8	63%	82%	82%	內容物單一，一維連續量，合併型，和數未知，加法
	Q9	63%	91%	94%	沒有內容物，二維連續量，改變型，被減數未知，加法
	Q10*	37%	79%	61%	沒有內容物，二維連續量，比較型，減數未知，減法
	Q11	57%	76%	85%	隱含內容物，離散量，比較型，差數未知，減法
	Q12	47%	85%	88%	隱含內容物，一維連續量，改變型，差數未知，減法
	Q13*	50%	79%	79%	沒有內容物，離散量，平衡型，被加數未知，減法
	Q14	50%	88%	91%	沒有內容物，離散量，改變型，加數未知，減法
概念性知識	Q15	30%	82%	79%	帶分數加帶分數的表徵題

本教學實驗之前，本研究曾對學生的解題性知識進行問卷調查，發現學生在“比多用減”，“比少用加”的比較型或平衡型問題的答對率均顯著低於其他類型。本教學實驗也有類似的結果。Q10是沒有內容物，二維連續量，比較型，減數未知，減法問題，實驗組主要的錯誤為解題性迷思，也就是學生受關鍵字影響而用加法來做減法問題，佔18%-33%。至於Q13是沒有內容物，離散量，平衡型，被加數未知，減法問題，實驗組主要的錯誤為解題性迷思，也就是受關鍵字影響，用加法來做減法問題，佔15%-18%。研究顯示，“比多用減型”（或者比少用加型）的加減法語意結構分類有它持續進行教學的必要性。我們不能因為學生在整數問題中已學過，在分數加減法的問題中就忽略掉它。研究顯示，在這類的問題中，當我們再次進行教學時，學生的答對率就會有所提升。

三、學生的推理、連結、溝通能力

本研究的主要目的是想在正規的數學課室中培育學生推理、連結與溝通的能力。這三種能力當然不可能一蹴即成。但是在教學過程中，學生已慢慢的能連結既有概念進行新概念的溝通，學生能利用既有概念進行新概念的推理。限於文章篇幅，我們以二個例

子說明學生的學習成效。在「一盒果凍有10顆，小娟吃了 $\frac{3}{5}$ 盒，還剩下多少盒？」以及

「一盒果凍有20顆，小娟吃了 $\frac{3}{5}$ 盒，還剩下多少盒？」的教學過中，學生能連結分數的基本概念(部份／全體或子集合／集合)進行概念性的溝通，例如，學生能主動說出

$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ 是「因為這一盒是有5份，2個一份(手指著兩個)，所以有5份， $\frac{5}{5}$ ，3份有 $\frac{3}{5}$ ，所以剩下上面

2 份」。也能在單位分數的內容物和分數概念間進行連結和推理，例如，學生說「我還有另一種算法，10(個)減6(個)等於4(個)」，並推理解釋為何是 $2/5$ 盒「(第二個問題：你知道他為什麼要除以4嗎?)因為它那個一份有4個」。最後，我們希望學生能慢慢形成無論內容物有多少個， $1-3/5$ 的結果一定是 $2/5$ 的抽象概念。

- T：這盒果凍呢，這盒果凍裡面有10顆，那我想請問xx 吃了 $3/5$ 盒之後全部剩下幾盒？來
- T：寫好的話老師請一個同學出來做做看。xx
- S：(xx 學生上台把算式寫出來 $1-3/5 = 2/5$)
- T：你怎麼做的？
- S：1 減掉 $3/5$ 等於 $2/5$ 。...因為這一盒是有5份，2個一份(手指著兩個)，所以有5份， $5/5$ ，3份有 $3/5$ ，所以剩下上面2份
- S：老師，我還有另一種算法
- T：來說說看你怎麼做的？S：10(個)減6(個)等於4(個)
- T：你等一下喔，10 減6 等於4，然後呢？
- S：就沒啦
- T：那你答案多少？
- S：就4個呀
- T：4個，喔，同學你覺得這樣，xx 說4個可以嗎？
- S：要說剩下多少盒？
- T：xx 你覺得呢？同學說他是問剩下多少盒，可是你回答4個
- T：你覺得這樣子可以嗎？S：(搖搖頭)
- T：所以你覺得4個是不是 $2/5$ 盒， $2/5$ 盒是不是4個？
- T：對不對，所以你要回答幾盒
- S：10 減6 等於4 再除2 等於2 呀，2 再加分母的那個5，等於 $2/5$ ？
- T：所以你把他寫成這樣子就寫成 $2/5$ 是不是？是不是

同學請你寫在學習單裡面。

T：好，如果現在這盒果凍裡面有20顆，請問你現在怎麼做？

S：分母還是5喔

T：對，一樣是吃了 $3/5$ 盒。

...

T：老師請幾個同學出來做，第一個我請S1，第二個我請S2，第三個我請S3，請你們同時寫。

(S1 寫出 $20-12=8$ ， $8\div 4=2$ ；答： $2/5$ 盒，S2 寫出 $20-12=2/5$ ，答： $2/5$ 盒；S3 寫出 $1-3/5 = 2/5$ 。)

T：S1，可以跟我講一下你是怎麼做的嗎？

T：你的方法20 減12，這個12 是什麼東西？

S1: $3/5$

T： $3/5$ 盒是不是

T：好，剩下8，是剩下的喔

S1： $2/5$

T：這就是 $2/5$

T：剛剛這樣算出來是不是？你知道它為什麼要除以4嗎？

S1：因為它一份有4個

T：同學，S1 這樣寫你們懂嗎？
S：懂
T：懂，那你們覺得S2 這樣寫怎麼樣？S4
S：20 減12 會等於 $\frac{2}{5}$ 嗎？
T：對呀，同學你覺得20 減12 會等於 $\frac{2}{5}$ 嗎？20 減12 等於多少？
S：8
T：那S2
S：寫錯
T：寫錯，你本來想怎麼寫呢？
S：8 顆
T：8 顆，對，所以呢，這題做法其實跟S1 很像...
T：那我們來看一下S3 寫的，你們看得懂嗎？
S：看得懂T：S3 你可以說一下怎麼做的
S3：跟剛才一樣
T：剛才一樣，一盒裡面減掉 $\frac{3}{5}$ 盒
S3：因為分子跟分母都沒有換
T：對，好，對，所以你發現這種題目其實很好玩喔。這題，他吃了 $\frac{3}{5}$ 盒意思就是他現在一份有2 顆，分成5 份，對不對？這題一份有4 顆，可是他還是吃了三份，所以還是剩下兩份，5 份裡面的兩份，就是 $\frac{2}{5}$ ，對不對？所以一樣是 $\frac{2}{5}$ 。問題是每一份裡面的顆數不一樣，可以了解嗎？
S：了解

柒、結論與建議 一、結論

文獻探討之後，本研究的理念是想要在正規數學課室中培養學生的數學知識、能力和威力，就是要讓學生了解各個概念的學習和解題並不是無中生有，而是連結既有相關概念，並運用既有概念進行推理和溝通。因此，我們的教學設計是依據分數概念的單位分數內容物與情境結構、整數加減法的語意結構、四則運算的運算結構，以及概念溝通的表徵進行同分母分數的加減法概念的教學素材與評量試題設計。同時也將評量的理念融入全班溝通討論與個別實作的教學過程之中。

實驗結果發現，在前測時，各項數據顯示實驗組和對照組都沒有顯著差異。在後測和延後測時，在總體表現方面，實驗組比對照組的答對率高約一成，達顯著差異。表現概念性知識的作圖或文字說明題中，實驗組從前測的三成到後測與延後測的八成，表現均較對照組為優，且達顯著差異。在表現程序性知識的計算題上，實驗組與對照組學生的答對率達顯著差異，但實驗組在後測與延後測上的平均答對率約高對照組一成左右。在表現解題性知識的問題中，實驗組與對照組的學生在答對率上並未達到顯著差異，但實驗組學生的答對率從前測到延後測成績的進步幅度較大，且實驗組學生在後測與延後測上的平均答對率約高對照組學生一成左右，可見本實驗教學確有其成效。

在個別試題方面，前測時，對照組對沒有內容物的離散量、改變型、加數未知的減法問題的表現優於實驗組，相差約四成且達顯著差異，其餘並無顯著差異。後測時，實驗組在帶分數減整數的程序性計算題，隱含內容物的連續量、改變型、差數未知的減法解題性問題，以及概念性知識的表徵題等三題的答對率優於對照組，高約二至三成且達顯著差異。同時，前測時達顯著差異的問題，已沒有顯著差異。在延後測時，實驗組在整數減帶分數的程序性計算題，以及概念性知識的表徵題等二個問題優於對照組，高約三成且達顯著差異。

本教學實驗結果發現，實驗組在總體表現，以及表現數學能力的概念性知識、程序性知識、和解題性知識，在後測和延後測都高達八成，已達課程暫行綱要編輯委員所認為80%的學生可以學習的標準。在個別試題方面，只有同分母帶分數相減需退位的程序性問題。整數減帶分數需退位的程序性問題，以及沒有內容物、二維連續量、比較型、減數未知的減法問題等三題答對率未達八成的標準，但也有七成多。其餘問題都已達八成的標準。從上述分析發現，本教學實驗的結果，學生在所有試題的表現均達課程綱要編輯委員的要求 – 五、六成的學生學會。

在推理、連結和溝通等數學威力方面，本教學實驗提供了學生了解如何連結既有概念進行新概念的學習與溝通，利用既有概念進行新概念的學習推理的機會。假如學生能了解許多數學概念的學習也可以經由此一歷程而來，學生的推理、連結和溝通能力一定可以強化。在本研究中，學生已能從單位分數的內容物的教學探究分數的真正概念，也能連結內容物或分數概念進行推理和溝通。再從概念性評量試題的分析，大多數實驗組學生已能清楚的利用圖像表徵或文字表徵溝通他所學會的概念。

二、建議

美國NAEP(2002)的評量架構 – 數學內容、數學能力和數學威力，不僅可以做為評量架構，也可以做為教學的架構。本教學實驗就在這個架構下，設計同分母分數加減的素材、教學活動以及評量試題。同時也將評量的理念融入全班溝通討論與個別實作的教學過程之中。實驗結果令人滿意，因此提出下列建議：

(一)教學素材

從學者的觀點和文獻研究發現，同分母分數加減法的教學素材，應考慮到相關的概念，例如，分數概念的三種詮釋方式，單位分數的內容物問題 – 內容物為單一個物、多個個物和沒有指稱個物，分數概念的情境結構 – 一維連續量、二維連續量、離散量，整數加、減法的語意結構 – 合併、改變、比較、平衡等類型，四則運算結構 – 被加(減)數未知、加(減)數未知以及和(差)數未知，以及概念的表徵方式 – 實物情境、具體操作物、圖像、口語、書寫符號。然後依據這些相關的概念設計同分母分數加減法的素材，使學生能在正規的數學課室中提升數學威力，從既有概念連結新概念的學習和溝通、推理。這些多樣化的素材也提供學生提升數學能力 – 概念性知識、程序性知識和解題性知識 – 的機會。

本研究也建議所有數學內容的教學素材也應參酌學者和相關的研究，研擬相關既有概念讓學生能進行連結，了解如何進行新概念的溝通和推理。(二)教學活動

近年來，數學教學強調學生能獨立思考並表達想法，能在尊重與欣賞的態度下與他人溝通，藉由團體合作來解決問題的學習。本次實驗教學，因為學生習慣於傳統講述教學，於是我們讓學生透過全班性溝通討論與個別實作，進行推理、連結和溝通而已獲得良好成效。

本研究建議老師在進行教學活動的過程中，應考量學生的學習習慣，運用適切的教學方法進行教學。因為傳統講述教學方法會使大多數學生處於被動的學習，而無法了解其連結、推理能力的習得。因此建議在可以連結既有概念學習新概念的數學單元，教師應少用講述教學方法，應利用全班性的溝通討論，讓學生在溝通的過程中了解如何連結既有概念，培養學生溝通和推理的能力。假如時機成熟，老師也可以將全班溝通討論的模式縮小為小組合作學習的模式，讓學生和學生之間能進行概念性的合作學習，培養學生的溝通與團隊合作的默契。當然，老師在適當時情況下也應讓學生有進行個別實作的機會，以培養學生獨自解題的能力。

(三)教學評量

本研究認為教學評量應該強調它的積極性，應該在教學過程中融入評量的理念，也就是在教學過程

中應適時診斷學生的困難並藉此幫助學生學習。我們建議同分母分數加減法的教學，應該在一開始的時候就進行評量學生既有概念的安置性評量，藉此了解學生的起點是否仍有舊概念的迷思。在教學過程中進行評量學生學習困難的診斷性評量和概念初步建立的形成性評量，以及課後的總結性評量。同時在評量問題的設計上，可以透過上述相關概念的分析，使評量的試題能有所變化，讓我們可以適時的評量學生的概念性知識、程序性知識和解題性知識。

誌謝：

本文是國科會專題研究計劃編號：92-2522-S-133-002-的部份結果。感謝在本研究中所提及的所有參與教師以及學童們分享他們的學習經驗，有了他們的參與使本研究得以順利完成。文中論點為作者所有，不代表國科會。

參考文獻

- 王瑞慶(2002)：國小六年級學童在分數加減法問題的解題研究。屏東：國立屏東師範學院碩士論文(未出版)。民生報(2003)：國中小數學難度要加深。民生報，2003年02月23日。呂玉琴(1991a)：影響分數概念表現的因素。臺北市立師範學院學報，4，573-606。呂玉琴(1991b)：分數概念：文獻探討。臺北市立師範學院學報，4，587。呂玉琴(1993)：影響分數二分之一概念的因素。國民教育，33，2-11。李源順(2005)：同分母真分數加減運算的教學建議。臺灣數學教師(電子)期刊，(3)，2-26。周柏達(1999)：國民小學數學科新課程實驗班與普通班分數學習表現之比較研究。臺北市：臺北市立師範學院國民教育研究所碩士論文(未出版)。林碧珍(1990)：從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的分數概念。新竹師院學報，4，295-347。林福來(1994)：八十三年度基礎科目數學科試題研發工作計劃。臺北市：大學入學考試中心。張春興(1989)：張氏心理學辭典。臺北市：東華書局。教育部(2000)：國民中小學九年一貫數學學習領域課程暫行綱要。臺北市：教育部。教育部(2003)：國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要。臺北市：教育部。陳竹村、林淑君和陳俊瑜(2001)：國小數學教材分析—分數的數概念與運算。臺北：國立教育研究院籌備處。黃俊惟(2002)：網路擬題練習在解分數加減法問題上之研究。嘉義：國立嘉義大學碩士論文(未出版)。楊壬孝(1987)：國中小學生分數概念的發展。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告(編號：NSC-76-0111-S-003-10)。執行單位：國立臺灣師範大學數學系。楊壬孝(1988)：國中小學生分數概念的發展。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告(編號：NSC-77-0111-S-003-09A)。執行單位：國立臺灣師範大學數學系。楊壬孝(1989)：國中小學生分數概念的發展。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告(編號：NSC-78-0111-S-003-06A)。執行單位：國立臺灣師範大學數學系。蔣治邦(1994)：由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。出自臺灣省國民教師研習會91994)：國民小學數學科新課程概說—低年級。臺北：臺灣省國民教師研習會。謝堅、蔣治邦和林淑娟(2002)：國小數學教材分析—整數的數量關係。臺北：國立教育研究院籌備處。龐嘉芬(2001)：國小高年級學童分數概念與能力之研究。屏東：國立屏東師範學院碩士論文(未出版)。Behr, M.J.; Harel, G.; Post, T.; & Lesh, R.(1992). Rational number, ratio, and, proportion. In Douglas A. Grouws(ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.296-333). Macmillan publishing company,

New York.

- Bruner, J.S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University.
- Cramer, K.; Henry, A., (2002) Using manipulative models to build number sense for addition of Fractions. In National Council of Teachers of Mathematics (2002). *2002 Yearbook: Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*. (pp. 41-48). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dufour-Janvier, B.; Bednarz, N.; & Belanger, M. (1987) .Pedagogical considerations concerning the problem of representations . In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp.109-122). Hillsdale , NJ : Lawrence Erlbaum Associates.
- Fuson, K.C.(1992). Research on whole number addition and subtraction. In D.A. Grouws(1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.243-275). Macmillan publishing company, New York.
- Greeno ,J.G .(1987). Instructional representations based on research about understanding . In A.H. Schoenfeld (Ed.) , *Cognitive Science and Mathematics Education* . Hillsdale .
- Herman, J.; Ilucova, L.; Kremsova, V.; Pribyl, J.; Ruppeldtova, J.; Simpson, A.; Stehlikova, N.; & Sulista, M.(2004). Images of fractions as processes and images of fractions in processes. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004, 4*, 249–256.
- Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp.19-26). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lesh, R.(1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*.33~40.
- Lesh, R.; Post, T.; & Behr, M. (1987). Representation and translation among representation in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problem of representation in teaching and learning of mathematics* (pp.33-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lukhele, R. B.; Murray, H.; & Olivier, A.(1999). Learners' understanding of the addition of fractions. *Paper presented at the 5th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA)*, Port Elizabeth, 5-9 July 1999.
- Morales, R.V.; Shute, V.J.; & Pelligrino, J.W.(1985). Developmental difference in understanding and solving simple mathematics word problems. *Cognition and Instruction*, 2, 41-57.
- National Assessment Governing Board(2002). *Mathematics framework for the 2003 national assessment of educational progress*. National Assessment Governing Board U.S. Department of Education
- National Council of Teachers of Mathematics (2000) . *Principals and Standards for school mathematics*. Reston:VA : NCTM.

Teaching Research on Same Denominator Fraction Addition and Subtraction

Yuan-Shun Lee Shin-Fub Yu Yung-Yu Lee

Department of Mathematics and Computer Science Education, Taipei Municipal University of Education

Abstract

From literature review, we suggest that the learning of mathematics ability and mathematics power of same denominator fraction addition and subtraction can be help by using representation of conceptual communication, situation structure of fraction conception, contents of unit fraction, semantic structure of whole number addition and subtraction, and operation structure of arithmetic fundamental operation to design teaching materials. Quasi-experimental designs for research, research samples are 69 of grade four. Research data include teaching observation and tests, validity of teaching observation and tests are using expert validity and contents validity, reliability of tests is using split-half reliability, and teaching observation is using triangulation. There are good results in teaching experiment. We suggest that the teaching materials of same denominator fraction addition and subtraction can use our design to help students to connect, to reason and to communicate with relation concepts, to nurture conception understanding, procedure knowledge, and problem solving of students. The teaching action should thought students learning characteristic using multiple optimization teaching methods for cooperation solving, self solving, and communication with schoolmates. The assessment of teaching should use placement assessment, diagnostic assessment, formative assessment, and summative assessment to instantaneously understand and help students learning.

Key words: same denominator fraction addition and subtraction, mathematics ability, athematics power