

透過具體角情境探討國小三年級學童 之解題表現

柯慶輝¹ 梁淑坤²

¹台中縣立公明國民小學 ²國立中山大學教育研究所

(投稿日期：90年1月31日；修正日期：90年2月26日；接受日期：90年10月9日)

[回 25 期目錄](#)

壹、緒論

一、研究動機與目的

數學教育為國民教育的核心課程(教育部, 2000), 而美國數學教師協會(NCTM)更將圖形與空間的教學視為未來數學教育的重點, 認為數學教育應著重在幾何圖形的特性、幾何關係、空間知覺等的瞭解; 在形的教材部分, 角概念的學習是更高層次幾何課程的基礎(NCTM, 2000)。觀之國內小學的角概念課程, 無論是在民國 82 年版或民國 64 年版的數學科課程標準中, 均列為重要的學習單元, 即使是在九年一貫課程中, 角概念的學習也被列為重要的能力指標。

角的定義基於學者所依據學理的不同而趨於多樣化, 然而, 正因為角定義的多樣化, 在數學教科書中所採取的角定義便有很大的不同, 再加上教材與教學的缺乏彈性, 以及學生知識背景與思考的型態, 使得學生在學習角概念上產生困難(Mitchelmore, 1998; 劉好, 1997)。

van Hiele (1986) 認為, 幾何脈絡無法藉由解釋的方式來告知, 必須讓兒童親自去經驗。兒童角概念的形成必須經由對角情境的分類, 再藉由認知不同角脈絡的相似性,

而抽離出角的概念（陳澤民譯，1995；Mitchelmore，1997）。在兒童角概念的相關研究中，Mitchelmore 依據前述理論，認為一般性的（非正式的）角概念發展，具備四項先決條件（prerequisites）：(1)不同具體角情境的情境知識；(2)分類角情境成爲角脈絡；(3)創造抽象角模型以表徵角脈絡；(4)認知不同脈絡間或不同脈絡之抽象模型間的相似性。上述理論，呼應兒童數學概念的形成是一連續的與自發性的過程，也就是知識應由兒童主動建構的觀點。

綜合以上所述，本研究旨在探究兒童如何主動從真實角情境佈題中建構角意義，在研究的方法上採取自然取向的研究典範，試圖從真實情境中蒐集資料，以分析兒童角概念形成的情形。鑒於國內初步的角概念課程均安排於小學三年級開始實施（教育部，1993；2000），本研究之目的在探究國小三年級學童在下列六方面的解題表現。

- (一) 具體角情境知識。
- (二) 角脈絡定義知識。
- (三) 抽象角模擬活動。
- (四) 察覺角的相似性。
- (五) 造角形活動。
- (六) 角意義知識的建構。

二、名詞釋義

(一) 具體角情境

本研究所指的具體角情境，是指蘊含角形的特定具體物，能讓兒童透過實際操作或觀察等方式，察覺該物所隱含的角的形式。例如房屋所隱含的圖形角、時鐘所隱含的張開角以及秋千所隱含的旋轉角等，房屋、時鐘和秋千均爲具體角情境。

(二) 角脈絡

本研究所指的角脈絡是將不同的具體角情境，根據角形成的類型之差異加以分類，歸納形成不同的角脈絡。在本研究中所探究的角脈絡，共有六種，包括無限制的旋轉、傾斜面、平面角落、交叉、彎曲物與彎曲路徑等。

(三) 相似性

本研究所指的「相似性」，是指在不同的具體角情境中均蘊含了角的構成要素，也就是說，它們都具備頂點與兩邊的概括相似性，並非幾何證明中的「相似」（即對應角相等，對應邊成比例）。

(四) 角意義知識的建構

指的是晤談的第六個階段，學童在完成晤談的前五個階段後，自行建構出角意義的知識。本研究晤談的前五個階段分別是：一、具體角情境知識；二、角脈絡知識；三、以抽象模型表徵角情境；四、認知不同角脈絡的相似性；五、造角形活動；以上五個階段，參見本文之研究方法。

貳、文獻探討

一、角的意義

Close (1982) 認為從來就沒有一個被普遍接受的角定義，在分析 Heath、David Hilbert、Gustave Choquet 等對於角定義所採取的幾何方法後，他認為較近代的角的分類，包含了兩類範疇—分別屬於靜態的與動態的觀點。屬於靜態的分類，視角為一固定的維度 (dimension)，類似高度、重量或距離等，這類定義又分為兩類，即角被認為是兩條直線的方向差，以及角被看成是包含兩直線之平面的一部分，或者交於一點之平面的一部分。而歸類於動態的角，將角視為包含於平面上一邊旋轉至另一邊的量 (或度量)。Close 採取靜態的和動態的觀點定義角，其中靜態角 (static angle) 是指同一端點的兩條直線所張開的開度；而動態角 (dynamic angle) 是指一直線繞一端點旋轉的量。

Mitchelmore (1998) 認為現代的角的定義，傾向分成三種廣闊的範疇，將角視為：兩條直線交於一點，其中任一直線旋轉的量；兩共端點射線的聯合 (union)；兩半平面 (half-planes) 相交。這三類範疇分別對應或形成旋轉、射線對 (ray pair)、和區域 (region)。他認為理想角的定義可以以下三點來說明：第一、角是一雙定出兩個方向間差量的射線；第二、角是自同一端點射出的兩射線所圍出的一個平面區域；第三、角是一射線繞其端點旋轉一個程度的量 (Mitchelmore, 1989)。

Krainer (1993) 則從圖形表徵的觀點，以有無弧線標示或方向標示，區分出三類不同的角：其中無弧線標示的角，是指角的圖形表徵是頂點與兩邊，角度由 0 度到 180 度；有弧線標示的角，則是指角的區域與張開程度以弧線標示，角度介於 0 度到 360 度；而有方向的角，指角的旋轉量以方向箭頭表示，箭頭代表起始邊與終點邊，是有方向性的，角度可大於 360 度。

在民國 82 年版課程標準下，國立編譯館在其所編國小數學科教學指引中指出，角

的定義從生活上之應用與數學上的觀點來看，可以分成三種情況(國立編譯館，1999)：角是一種圖象的表徵，從某一方向轉至另一方向；角是自同一端點射出的兩射線間的差量；角是一射線繞其端點旋轉一個程度的量。上述定義在課程標準中，分別形成了圖形角、張開角與旋轉角三種範疇，與 Mitchelmore 對於現代的角定義所分類的三種範疇，即將角視為區域、射線對和旋轉的觀點相同，也近似 Close 對現代角定義所做的分類。

綜合 Close、Mitchelmore、Kraimer 及我國教科書對角的描述與分類，雖然角的定義尚未有共同的觀點，但對於角蘊含了圖形角、張開角與旋轉角的意義，是較被接受的；然而，上述的角定義是依據數學家的想法分類而成的，事實上，根據建構主義的觀點，兒童對於從生活經驗中形成的角概念，並不必然符合數學上的角定義；因此，本研究根據研究之目的，進行學童角概念研究時，對於角的定義，是指兩直線交於一點，兩直線間有一角度量的關係；Mitchelmore 與 White(1998)稱此定義為標準一般角概念(the standard general angle concept)，此定義中的「一般」能同時對應旋轉、射線對和區域三組角定義；而「標準」則用來涵概數學中通用的角概念。本研究採取「標準一般性角概念」，用以評估本研究的參與者在具體角情境解題表現中，所展現的角概念的內涵。表一顯示標準一般角定義與目前經常使用的角定義分類的對照。

表一 標準一般角定義與常用角定義之對照表

Mitchelmore (1989) 的現代角定義分類	區域 「角是一雙定出兩個方向間差量的射線」	射線對 「角是自同一端點射出的兩射線所圍出的一個平面區域」	旋轉 「角是一射線繞其端點旋轉一個程度的量」
課程標準 (82 版) 的角定義分類	圖形角	張開角	旋轉角
Mitchelmore 與 White (1998) 的角的上位概念	標準一般角概念 「兩直線交於一點，兩直線間有一角度量的關係。」		

二、兒童的角概念

關於兒童的幾何思考模式，van Hiele 認為兒童最初是透過視覺觀察具體物，由實物的輪廓來辨認圖形，這個過程須透過感官的操作，藉由視覺的觀察進行分類、造形、堆疊、描繪、著色等活動獲得概念。他認為幾何的學習包含五個發展層次：在層次 0，為視覺的（visual）層次—兒童能認知名稱和比較幾何圖形；在層次 1，為分析的（analytic/descriptive）層次—可以由圖形性質來認知圖形；在層次 2，為非正式演繹的或抽象的（informal deduction/abstract）層次—能建立圖形性質之間與圖形之間的關係；在層次 3，為正式演繹的（formal deduction）層次—能操弄各項性質間的關係，以演繹的方式證明理論；在層次 4，為嚴格的層次（rigor）層次—能以不同的假設系統建立理論，並分析及比較這些系統。van Hiele 認為從一層次發展到另一層次，是依賴教育的經驗而非年齡或成熟的因素（劉秋木，1996；Magina，1994）。

在九年一貫課程數學領域綱要中，關於圖形與空間的概念發展，該綱要採取 van Hiele 的觀點，認為圖形與空間的學習，應從學生生活經驗中所熟悉的形體入手，透過察覺、辨識、操作、實驗，發現形體的組成要素及其形體之間的關係，進而能確立空間的基本概念，掌握空間的基本性質，進行簡單推理。

至於兒童角概念的發展，國立編譯館（1999）根據民國 82 年所公布的課程標準，在國小數學課本第六冊的教學指引中，指出角概念的啟蒙為透過視覺活動，觀察圖形表徵的改變情形，此種圖形表徵稱為圖形角，即從某一個方向經過一個折點，轉至另一個方向，此時形成一個有尖點又稱頂點的折線；其次，角概念的發展漸從圖形表徵的靜態圖象角轉變成一動態測量的角，角表示了自同一端點，射出的兩射線間的差量，此即為張開角，其構成要素為兩射線及一端點；最後為旋轉角，即端點固定，旋轉移動一給定的邊。以上所述，是以角的表徵類型來劃分兒童角概念的發展；顯然，國內初步的角概念課程設計，採取靜態與動態的觀點來分類角，並且認為兒童的角概念的學習順序，應從靜態角發展至動態的角。

然而，國內外許多學者對於究竟應採取哪一種觀點教角，較有益兒童角概念的學習，仍未有一致的看法，如 Close（1982）、劉好（1997）即認為兒童只能由靜態的觀點知覺角的存在；而 Wilson 和 Adams（1992）則認為兒童學習靜態的角並不容易，反之，採取動態的觀點來教角，更有益角概念的學習。根據以上所述，顯然民國 82 年版的課程標準認同了兒童較易學習靜態角的主張，而根據新公佈的國民中小學九年一貫

課程數學領域暫行綱要，分析其能力指標，其對角概念的學習階段的觀點與民國 82 年版課程標準相同。

Skemp 認為數學概念的形，是透過個體不斷地對經驗進行分類（Classifying）與歸檔（fitting），將周圍環境中，具相似性與共通性的歸在一起，這便是抽象化；透過抽象化的活動，我們可以知曉我們經驗中的相似性。而抽象化的結果是一種認知的新經驗，或一種新的分類能力，稱之為概念（陳澤民譯，1995；Mitchelmore，1997）。澳洲學者 Mitchelmore（1997）根據上述理論認為一般性的（非正式的）角概念發展，具備了四項先決條件（prerequisites）：(1)不同具體角情境的情境知識；(2)分類角情境成為角脈絡；(3)創造抽象角模型以表徵角脈絡；(4)認知不同脈絡間或不同脈絡之抽象模型間的相似性。Mitchelmore & White（1998）布置真實的角情境，以晤談來探究兒童角概念的發展，提出兒童角概念發展的架構，將兒童角概念的發展分成三個階段：階段一是情境的角概念，在學齡前發展完成，兒童能夠分類日常生活的角經驗中，形成一具體的角情境；階段二是脈絡的角概念，兒童 9 歲時幾乎可以達到此階段，兒童能認知不同具體情境的角的相似性，開始形成角脈絡，一旦一個角脈絡被認知，兒童開始將脈絡中的角知識，運用到脈絡中的所有情境；階段三是抽象角概念，兒童能夠瞭解脈絡中幾何構造的相似性，每一相似性再定義出一個抽象角定義域，然後引出一抽象角概念，一旦兒童開始形成抽象角概念，他們便獲得了應用到與定義域對應的所有脈絡的知識，稱為抽象角知識，這階段大部分是中學教育的結果。

綜合以上所述，Mitchelmore 和 White 的角概念發展架構，其階段的劃分是依據概念形成的由具體而抽象的歷程來劃分，有別於民國 82 年版課程標準以角表徵的類型來劃分角概念的發展。本研究基於知識由兒童主動建構，以及數學概念的形成由具體而抽象的觀點，認為 Mitchelmore & White 的角概念發展架構對於探究兒童角概念的形，提供了理論的依據。

參、研究方法

本研究採取臨床晤談法做為資料蒐集的方法，最初由研究者呈現一些可操作、觀察的具體情境，再依晤談大綱佈題要求參與者解題，若參與者的回答與問題情境有關，則進行下一項佈題；若參與者的回答與問題情境無關或無法正確回答，則研究者會根據參與者的解題表現，再另行佈題，以澄清參與者的想法。

透過具體角情境探討國小三年級學童之解題表現

一、參與者

本研究的參與者是自台中縣某國小，三年級的四個班級中選取。每一組配對中有 4 位參與者（二位男生二位女生）接受晤談，從各班各選出 3 個，共選出 12 名研究參與者。

二、具體角情境分類

爲了探究兒童如何主動從真實角情境佈題中建構角意義，本研究對於真實世界中具體角情境的分類基礎，係改編自 Mitchelmore 和 White (1998) 的具體角情境試探性分類，此一具體角情境試探性分類，如表二所示，是依據兒童所可能注意到的表面的相似性（即全貌的角）爲基礎，所建構出角情境／脈絡的試探性分類，而非根據數學家所定義的角來分類。

表二 具體角情境的試探性分類 (Mitchelmore & White, 1998)

1.旋轉 (Turn)：繞一真實或想像的軸轉動。	
(a)無限制的 (Unlimited)	風扇、身體的旋轉、旋轉門、陀螺、風車、燈塔等。
(b)有限制的 (Limited)	收錄音機/瓦斯爐等的旋鈕開關、磅秤的指針、門把、水龍頭、窗栓等。
2.交會 (Meeting)：一個物體包含了兩條可區別的直線部分。	
(a)入射 (Incidence)	削筆小刀、時鐘的兩根指針、T 型字、圓規的兩臂、碰撞等。
(b)交叉 (Crossing)	十字、十字路、X 型、剪刀、輕鋼架等。
3.傾斜 (Slope)：從垂直的或水平的所產生的偏向。	
(a)線 (Line)	樹枝狀、桌腳、路、太陽高度角、樓梯扶手等。
(b)面 (Plane)	屋頂、牆、滑梯、斜面等。
4.角落 (Corner)：一剛性物體 (a rigid object) 包含了邊緣或頂點的一部分。	
(a)平面 (Planes)	牆角、屏風等。
(b)邊緣 (Edges)	桌頂、三角尺、箭頭、筆尖等。
5.彎曲 (Bend)：一系列的兩條或更多的連續線段。	
(a)物體 (Object)	迴力棒、支架、滑翔翼等。
(b)路徑 (Path)	轉向 (deflection)、反彈、走迷宮、閃電等。
6.方向 (Direction)：一直線與一固定 (想像的) 線間的偏向。	
(a)物體 (Object)	指南針的指向、相對位置。
(b)路徑 (Path)	人/車/飛行器/球等的運動。
7.開啓 (Opening)：從一點射出的兩條射線所包圍的區域。	
(a)固體 (Solid)	扇子、CD 盒等。
(b)流體 (Fluid)	灑水器、手電筒光線、噴泉等。

三、晤談材料 (兩組)

(一) 具體角情境材料

本研究參考 Mitchelmore 在其研究中所選取的六種角脈絡，設計提供參與者操作、觀察。這六種具體角情境材料，如下列圖一所示。其中凱帝貓表示繞一固定軸無限制的旋轉；剪刀代表交叉；斜坡的情境代表斜面的脈絡，其中斜坡的傾斜度，可由支架調整出 30 度、45 度與 60 度角，並準備一玩具小車供參與者操作；菱形板（銳角角度 45）代表平面角落，另外準備二塊銳角角度 30 度與 60 度的菱形板，供參與者操作與觀察；由三條不同彎曲度所構成的軌道代表彎曲物體，另外準備彈珠與斜坡，供參與者操作與觀察；撞球檯代表彎曲路徑（反彈），考慮到兒童操作球桿的困難性，另外準備市售的彈珠發射器供參與者操作與觀察。具體角情境材料在晤談的前五個階段使

透過具體角情境探討國小三年級學童之解題表現

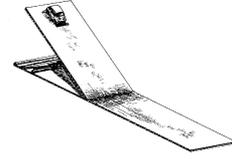
用。



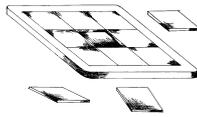
凱蒂貓（無限制的旋轉）



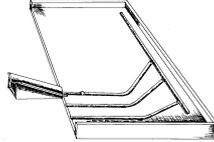
前刀（交叉）



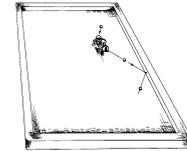
斜坡（傾斜面）



菱形板（平面角落）



軌道（彎曲物體）

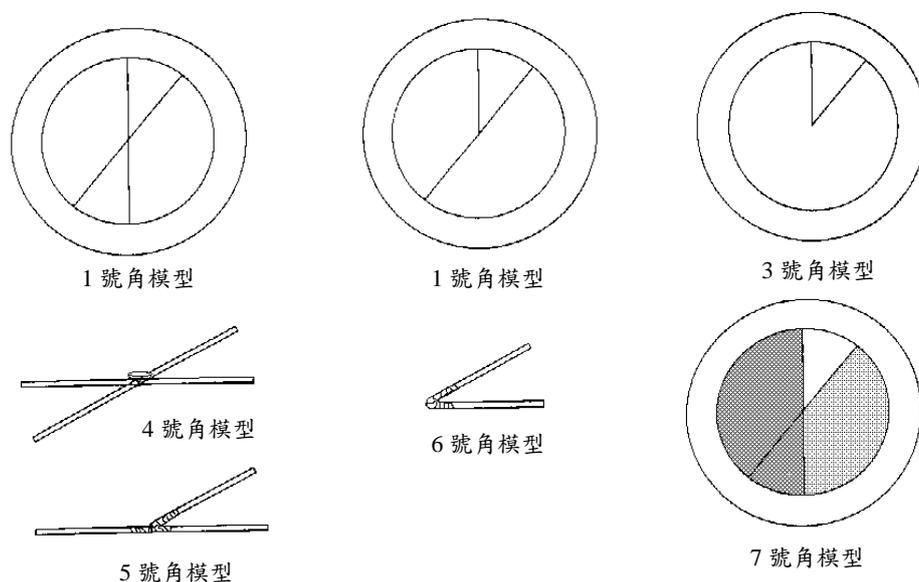


撞球檯（彎曲路徑）

圖一 六種具體角情境材料（及角脈絡）

（二）抽象角的表徵活動材料（二類）

抽象角的表徵活動材料共分為兩類，一為抽象角模型材料，如下面圖二所示，於晤談活動之階段三和階段四使用；另一為造角形活動材料，於晤談活動之階段五使用。研究者製作的七個抽象角模型，每一個都可以讓兒童輕易移動並旋轉，所以可以被調整以適合不同的角，使兒童可以模擬不同的角情境。這些抽象角模型，係參考 Mitchelmore (1997, 1998) 一系列研究兒童角概念所使用的抽象角模型。使用七種抽象角模型的目的，是為避免使用一特定模型，限制兒童抽離角概念；而且當兒童選取七種抽象角模型中的任一模型時，表示此一模型較其他模型更適於表徵某一角脈絡。



圖二 抽象角模型（活動式模型，能調整角度大小）

在本研究中所選取的六種具體角情境中，其所代表的旋轉、彎曲物和彎曲路徑（反彈），都包含兩條半線（half-line）和一共同的端點，可對應到抽象角模型中的 3 號角模型和 6 號角模型；斜面包含一條半線入射於一條全線（full line）上的一點，可對應到抽象角模型中的 2 號模型和 5 號模型；交叉包含兩條全線入射於共同的點上；而角落則包含兩條具共同端點的半線所圍成的區域，可對應到抽象角模型中的 7 號模型。

由於抽象角模擬活動中的抽象角模型，已將角構成要素中的兩條直線與頂點造形在一起，隱含了角是兩直線相交於一點所組成的角概念，在 Mitchelmore（1997, 1998）與 Mitchelmore & White（1998）的研究中，兒童只要能適當地使用抽象角模型來模擬具體角情境，便被認為是已認知每一情境的標準角。但這樣的活動是否真能代表兒童具備這樣程度的角概念，是讓人懷疑的，為了更嚴謹地評估兒童是否具備這樣的標準角概念，因此設計了造角形活動，於晤談的階段五進行。此一活動又分為磁條模擬與紙筆仿繪兩部分。磁條模擬是為探究兒童是否具備角是兩直線交於一點的標準角概念；而紙筆仿繪，則是為了進一步探究兒童所可能具備的動態角概念的嚴謹程度，而以紙筆仿繪進行造角形活動。

透過具體角情境探討國小三年級學童之解題表現

四、晤談程序（六階段）

本研究參考 Mitchelmore (1998) 之研究，將前述六個具體角情境按具備較明顯相似性（斜面和角落）、部分具體相似性（交叉和彎曲物）以及無明顯相似性（旋轉和彎曲路徑），區分成三組配對，十二名參與者隨機分派至此三組互異的角脈絡對中（二男二女；A 組—斜坡和菱形板、B 組—剪刀和軌道、C 組—旋轉貓和撞球檯）。本研究以英文字母 A、B、C 代表晤談的分組，晤談按 A、B、C 的組別次第實施，共計四個循環，而以阿拉伯數字代表晤談的循環次序，兩者的組合代表研究參與者的編碼，例如 A1 代表 A 組的第一位參與者。

另參考 Mitchelmore (1998) 所劃分的五個晤談階段，但為了更嚴謹的評估參與者所具備的角概念，研究者增加了「造角形活動」使成為第五階段，增加之後，本研究的晤談共六個階段：

- (一) 兒童對於具體角情境的知識。
- (二) 兒童從情境的角知識所擴展出的角脈絡知識（參與者形成角脈絡知識後，自本階段開始每一具體角情境，在研究過程中即含有角脈絡的意義）。
- (三) 兒童如何以抽象角模型表徵角情境（本研究以六種具體角情境代表六種角脈絡）。
- (四) 兒童認知兩不同角情境相似性的表現。
- (五) 兒童對於具體角情境的造角形活動。
- (六) 兒童對角意義的知識的建構。

研究者一次只晤談一名參與者，每一組角脈絡對中的四位組員均接受六階段的晤談，各晤談階段的意涵如下：

- (一) 兒童對於具體角情境的知識：本晤談階段是兒童角概念發展抽象化的最初階段，參與者透過觀察、操作具體物，經驗具體角情境中與角有關的特性，如角落、轉彎與反彈等，藉由參與者的語言與動作的表徵內容，研究者檢驗參與者能否發現具體角情境中角的存在，以及認知角度大小之差異比較和對於角的描述等。例如：菱形板的角落，兒童對於菱形板角落的認知，便是認知菱形板中的具體角情境。
- (二) 兒童從情境的角知識所擴展出的角脈絡知識：第二階段晤談以前一階段角情境知識為基礎，讓參與者分類他們本身的經驗，從經驗中的不變因去擴展對於相

似角情境的知識，形成角脈絡知識，研究者則從參與者的解題表現中進行分類，以確認參與者所認知的角情境類別。

- (三) 兒童如何以抽象角模型表徵角情境：研究者依序呈現編號 1 號到 7 號等七種不同的抽象角模型，讓參與者操作每一個抽象角模型去說明具體角情境，從參與者操作說明的過程中，觀察參與者對於角情境的知覺；另一個目的則在於試圖讓參與者在思考解題的過程中，嘗試藉由抽象角模型從具體角情境中抽離出角形。
- (四) 兒童認知兩情境相似性的表現：由於角脈絡的不同，參與者所認知的角的初級概念，可能有所差異，為使參與者能從不同角脈絡的相似性經驗中，統合形成更高階的角概念，研究者在晤談的第四階段，便是試圖藉由佈題讓各組參與者從兩不同角脈絡所認知的角經驗中，去發現不同角脈絡之間的相似性，從而產生較高階的角概念。
- (五) 兒童對於具體角情境的造角形活動：透過佈題要求參與者將所認知的不同角脈絡之間的相似性一即角形，以磁鐵條（黏貼）和紙筆（手繪）為材料表徵出來，是視覺幾何結構的符號化，並藉由晤談問題，建立符號的意義。此一活動又分為磁條模擬與紙筆仿繪兩部分，磁條模擬是為了探究兒童是否具備角是兩直線交於一點的標準角概念；而紙筆仿繪，則是為了進一步確認兒童所可能具備的角概念的嚴謹程度。
- (六) 兒童對角意義的知識：在經歷過前述五個階段的晤談活動後，研究者在本階段首次正式提到「角」，研究者會要求參與者回答如「剛才你看到的（具體角情境）中有沒有角？」以及「你能告訴我角是什麼嗎？」等問題，研究者根據參與者所建構角意義，分析各組參與者的角意義分類以及比較，以及參與者的角概念發展階段。

為使上述六個階段的晤談順利完成，晤談的實施均依據一事先擬定的晤談大綱（如附錄一）進行，使能確保晤談活動的內容能貼近本研究之目的。在晤談的前五個階段，研究者並不主動提到「角」的字眼，以避免影響參與者在晤談過程中對於角概念的建構，研究者在晤談過程中會使用一些中性的提示語，如「很好，你覺得還有哪些呢？」或者「好，請你說說看」等。並且在晤談過程中同時使用 V8 攝影機和錄音機，蒐集參與者在晤談過程中的表現。

本文各個部分的撰寫是取材自一完整的研究論文，因受限於篇幅，許多資料，例如參與者在各晤談階段中的解題過程等，無法呈現出，讀者可從該研究論文中獲得較完整的報告（柯慶輝，2000）。

參、討論

一、具體角情境知識的解題表現

在解具體角情境的相似性問題時，具體角情境所具備的表面相似性是影響參與者解題的重要因素。其中菱形板、斜坡、軌道與剪刀均具備了明顯可見的角形結構，撞球檯情境中雖然未具備明顯可見的角形，但觀察彈珠反彈路徑所形成的心像，仍然可以很容易辨認出角形特徵，因此，參與者在認知上述五種具體角情境的相似性上表現較佳；凱蒂貓具體角情境中的旋轉角，不似其它五種具體角情境具備明顯的角形特徵，參與者無法由外觀或路徑獲得角形，必須由凱蒂貓旋轉的方向變化上自行建構出角形，在第一階段的晤談中，四位參與者均無法指出凱蒂貓具體角情境具有角形的相似性，只有其中三位參與者指出動態角的相似性—旋轉。

除了凱蒂貓情境外，參與者在其他五種具體角情境中均具備良好的角情境知識，但在知識的表徵上均遭遇到一些困難，如參與者描述菱形板的角落為「尖尖的地方」；描述軌道的角度的差異為「彎的地方不同」；……等等，前述「尖尖的地方」、「彎的地方」等，指的都是角形，顯然，參與者雖然具備了良好的具體角情境知識，卻未必能以成人的社群用語來表達，而只能以其所具備的語言能力來表達。在 Mitchelmore 與 White（1998）的類似研究中也指出，澳洲兒童（平均年齡 9.6 歲）雖然了解具體角情境之間的關係，卻無法將成人的標準用語運用在這些關係中。

在極端條件的解題上，參與者在「0 度」角概念的認知上，遭遇到一些困難。分析所有的六個具體角情境，軌道、剪刀與凱蒂貓等三個情境，在極端條件命題中，會出現「0 度」角的解答情境；除了凱蒂貓情境有二人出現「0 度」角的解答情境外，其它兩個具體角情境中，只要是牽涉到「0 度」的解答情境，參與者均未能正確作答。在 Mitchelmore 與 White（1998）的研究中也指出，澳洲兒童在極端條件解題上也遭遇到一些困難。

二、角脈絡知識上的解題表現

晤談第二階段的解題表現整理於表三中。表中第二欄「參與者的回答不合於

Mitchelmore 與 White 的具體角情境分類者」，是指參與者在角情境的擴展上，不合於 Mitchelmore 與 White 對於該具體角情境所屬之脈絡分類，其回答占全部之比例；第三欄「參與者的回答合於 Mitchelmore 與 White 之角脈絡分類者」；第四欄「參與者的回答合於 Mitchelmore 與 White (1998) 之次角脈絡分類者」，此一次角脈絡分類是依據具體角情境所具備的表面相似性來歸類的。前述四欄意謂著角情境的概念化程度，若我們將次角脈絡的概念訂為「初級概念」，則角脈絡的概念可視為「二級概念」，二級概念可以同時包含數個初級概念；因此，在歸類參與者回答的脈絡屬性時，發現有些回答雖不合於各具體角情境之次角脈絡分類，卻合於該情境所屬角脈絡之分類。

由表三可知，合於 Mitchelmore 與 White (1998) 對於該具體角情境之次角脈絡分類者，以斜坡、凱蒂貓和撞球檯的比例最高；其次是菱形板和軌道，最低者為剪刀情境。從這樣的結果可以發現二種意涵：第一、在具體角情境的擴展解題上，參與者顯然會根據所操作的具體角情境之表面性特徵，如凱蒂貓情境的擴展，是依據其無限制旋轉的表面性特徵；第二、剪刀與軌道的次角脈絡分類，對於參與者而言並非是一明顯的表面性特徵。

若以另一種方式來做比較的話，亦即合於 Mitchelmore 與 White 對於各具體角情境之具體角脈絡之分類者，發現菱形板、凱蒂貓與撞球檯的比例最高，其中菱形板和凱蒂貓情境，完全合於 Mitchelmore 與 White 的分類；其次是斜坡情境；最低的是軌道與剪刀情境，相對而言，這兩種具體角情境有較多的比例是不合於 Mitchelmore 與 White 的角脈絡分類。可見角落、傾斜、旋轉與彎曲等四個角脈絡，對於參與者而言，其結構特徵是最明顯的。

透過具體角情境探討國小三年級學童之解題表現

表三 各組參與者在角情境擴展上解題表現之比較

具體角情境	角情境之脈絡屬性		參與者的回答不合於 Mitchelmore 與 White (1998) 之具體角情境分類者	參與者的回答合於 Mitchelmore 與 White (1998) 之角脈絡之分類者	參與者的回答合於 Mitchelmore 與 White (1998) 之次角脈絡之分類者	參與者的回答與的角情境無關者
	角脈絡	次角脈絡				
菱形板	角落	邊緣	0	100%	68.9%	0
斜坡	傾斜	面	0	84%	80%	16%
軌道	彎曲	物體	41.4%	58.6%	55.2%	0
剪刀	交會	交叉	44.4%	44.5%	18.5%	11.1%
凱蒂貓	旋轉	無限制	0	100%	90%	0
撞球檯	彎曲	路徑	7.1%	92.9%	78.6%	0

說明：表中第三欄「合於 Mitchelmore 與 White (1998) 之角脈絡之分類者」之百分率，包含了第四欄「合於 Mitchelmore 與 White (1998) 之次角脈絡之分類者」之百分率，第二、三及第五欄的總和為 100%。

根據 Mitchelmore 與 White (1998) 的研究，澳洲兒童（四年級學童，平均年齡 9.6 歲）在具體角情境擴展的解題表現中，無限制的旋轉與邊緣的角落之擴展是最容易的，在 37 個回答中有 30 個顯示出這樣的特性，本研究參與者也有類似的表現；在 Mitchelmore 的研究中表現次佳的是交叉與面的傾斜次角脈絡，在本研究則是彎曲路徑與面的傾斜次角脈絡。此外，在 Mitchelmore 的研究中，彎曲物體與彎曲路徑的擴展，對於兒童而言是較困難的，Mitchelmore 認為他們相當不確定彎曲物體與彎曲路徑，具有任何幾何的特徵；而本研究參與者表現較不理想的是彎曲物體與交叉次角脈絡。可見本研究參與者本階段表現與 Mitchelmore 的研究是相接近的，特別是無限制的旋轉、邊緣的角落、面的傾斜以及彎曲物體等四個次角脈絡，兩地研究結果可說是一致的。

三、抽象角的模擬活動的解題表現

研究者根據 Mitchelmore 與 White (1998) 所分類的四個模擬活動類型，來分析參與者在本階段的解題表現。這些類型說明如下：

1. 精確標準模擬 (Precise standard modelling)：抽象角模型上的兩條線，很明顯的對齊具體角情境上的兩條適合的線，並且在模擬的過程中以包含標準角內涵的字眼來解釋情境。

2. 近似標準模擬 (Approximate standard modelling)：抽象角模型上的兩條線，雖然能夠明顯地對上具體角情境上的兩條適合的線，但在模擬過程中，卻未能成功地以具標準角內涵的字眼來解釋情境。
3. 部分模擬 (Partial modelling)：參與者只能使用抽象角模型上的一條線，來模擬具體角情境上的一條線，也未能成功地以標準角內涵的字眼來解釋情境。
4. 無關的模擬 (Irrelevant modelling)：此類的模擬，包括拒絕使用抽象角模型，或者以抽象角模型模擬不適當的角，例如在斜坡情境中，以抽象模型模擬斜坡上的角落，而非斜坡的傾斜角。

(一) 抽象角模擬活動表現之比較

參與者的抽象角模擬活動解題表現，整理於表四中。在交叉脈絡下，大部分的解題都能夠使用到標準模擬（包含精確標準角模擬和近似標準角模擬）；比例次高的是角落與彎曲物脈絡；第三高的是面的傾斜與彎曲路徑脈絡；最低者為無限制旋轉脈絡（凱蒂貓情境）。

表四 參與者在模擬活動中的表現類型次數分配

脈 絡	抽象模擬活動的類型			
	精確標準角模擬	近似標準角模擬	部分的模擬	無關的模擬
角 落 (菱 形 板)	6(21.4%)	14(50%)	2(7.2%)	6(21.4%)
斜 坡 (傾 斜 面)	0	13(46.4%)	1(3.6%)	14(50%)
彎 曲 物 (軌 道)	13(46.5%)	6(21.4%)	3(10.7%)	6(21.4%)
交 叉 (剪 刀)	14(50%)	12(42.8%)	1(3.6%)	1(3.6%)
旋 轉 (凱 蒂 貓)	6(21.4%)	2(7%)	10(35.8%)	10(35.8%)
彎 曲 路 徑 (撞 球 檯)	0	15(53.6%)	7(25%)	6(21.4%)

說明：表中所顯示的百分率，其總數是以各組四名參與者，每一名參與者操作七種抽象角模型，因此共有 28 個解題表現，以此總數除各歸類於各模擬類型的解題數。

其中角落、彎曲物和交叉角脈絡，由於具有明顯的兩條線，說明了為何參與者在模擬活動時，會有較高的比例會使用到標準角模擬；而旋轉和彎曲路徑由於不具備明顯的兩條線，也說明了參與者能夠使用標準模擬的比例較低；但是傾斜面雖然具備明顯可見的兩條線，使用標準模擬的比例卻只有 46%，甚至比彎曲路徑還低，可能是研

透過具體角情境探討國小三年級學童之解題表現

究者所設計的斜坡具體角情境，同時包含了其他脈絡（如角落、旋轉等）或構造性質（平面、較多的線條），混淆了參與者對於單一概念（傾斜面）的萃取。

根據 Mitchelmore 與 White（1998）的研究，澳洲兒童（四年級，平均年齡 9.6 歲）在抽象角模擬活動中，其表現較本研究參與者的表現為佳，特別是在旋轉、交叉、角落和彎曲物體等四個脈絡，幾乎所有的澳洲兒童（比例 90%）都能使用到標準模擬，而本研究超過 90% 的只有交叉脈絡。比較 Mitchelmore 的研究與本研究中參與者的表現，有三點主要的差異：第一、澳洲兒童在大部分的脈絡中（除了彎曲路徑外）使用到標準模擬的比例，較本研究為高；第二、澳洲兒童在旋轉脈絡中有將近 90% 使用到標準模擬，在本研究中卻是所有脈絡中最低的（只有 28%）；第三、對於澳洲兒童而言，最感困難的是彎曲路徑脈絡，使用標準模擬的比例約 40%，但本研究卻有超過半數的參與者能使用標準模擬。研究者認為前二點差異，可能受參與者成熟與學校教育二項因素的影響，因為 Mitchelmore 的研究對象為四年級兒童，本研究為三年級兒童，以旋轉脈絡為例，由於其所蘊含的角形並不明顯，必須由參與者自行建構，對於本研究的三年級而言，使用標準模擬的比例最低，是可以理解的；至於第三點差異形成的原因，研究者推測在於 Mitchelmore 的軌道轉彎的弧長較長，角形較不明顯，而本研究的所使用的軌道轉彎的弧長較短，有較明顯的角形。

(二) 角模擬活動中表現最佳之抽象角模型

各具體角情境模擬活動被歸類為精確標準角模擬與近似標準角模擬的人數，整理於表(五)中。其中，在交叉角脈絡中，參與者不管使用哪一種抽象角模型(1 號到 7 號)，幾乎都能使用標準角模擬的方式來說明；在角落脈絡中，也幾乎有 75% 的參與者能夠運用所有的抽象角模型，以標準角模擬的方式來說明；傾斜面和彎曲路徑角脈絡中，6 號模型是最經常被使用而能夠表現出標準角模擬者；在彎曲物的模擬中，參與者使用 3 號和 6 號模型，都能表現出標準角模擬；在旋轉角脈絡中，由於不具備明顯的兩條線，幾乎所有的抽象角模型的表現都不好，只有 6 號模型的說明有兩次被歸類為標準角模擬。事實上，3 號和 6 號模型具備明顯的「V」構形，較能說明情境中所蘊含的角形。

表五 以各抽象角模型模擬各情境表現出標準模擬的次數

角脈絡	抽 象 角 模 型						
	1 號	2 號	3 號	4 號	5 號	6 號	7 號
角 落 (菱形板)	3	3	3	3	3	2	3
斜 坡 (傾斜面)	2	2	2	1	1	3	2
彎 曲 物 (軌 道)	2	2	4	3	2	4	2
交 叉 (剪 刀)	4	4	4	4	4	3	3
旋 轉 (凱蒂貓)	1	1	1	1	1	2	1
彎曲路徑 (撞球檯)	2	2	2	2	2	3	2
次數累計	14	14	16	14	13	17	13

說明：表中每一細格之最大數為 4，因為每一情境有四名參與者。

在 Mitchelmore 與 White (1998) 的研究中，澳洲兒童（四年級，平均年齡 9.6 歲）除了在彎曲路徑脈絡使用 3 號和 6 號模型明顯表現較佳外，其它五種脈絡 1 號到 7 號模型的表現，沒有明顯的差異。本研究則是在彎曲物體脈絡中，具有明顯的差異。統計各抽象角模型被使用為標準角模擬的次數，可發現 3 號和 6 號模型比其他的抽象角模型，較常使用到標準角模擬，它們具有「V」形的構造特徵，在 Mitchelmore 的研究中也發現類似的傾向。

四、認知兩不同具體角情境相似性的解題表現

在本階段並不區分精確與近似標準角模擬，因為在這兩種模擬類型中，參與者都已能認知情境中的標準角。在本階段將只以「標準角相似性」、「部分相似性」以及「無關的相似性」來區分參與者認知的相似性類別，這些類別的內涵說明如下：

1. 標準角相似性：參與者能以蘊含標準角意義之方式，指出兩不同脈絡之間的相似性。
2. 部分相似性：參與者對兩個不同具體角情境相似性的解釋，只觸及脈絡中的一條線。
3. 無關的相似性：參與者所指的兩個不同脈絡之間的相似性與角情境無關。例如，兩個不同具體角情境都是木頭做的等。

(一) 參與者認知脈絡對之相似性的解題表現

參與者在本階段的解題表現，整理於表(六)。其中，交叉與彎曲物脈絡對被認知

透過具體角情境探討國小三年級學童之解題表現

為標準角相似性的人數，是各脈絡對中最高的，所有四位參與者都能認知這兩種角脈絡具有標準角相似性。本研究所使用的斜坡，具備較多的干擾因素，因此在角落與傾斜面脈絡對中，認知標準角相似的比例並不高，只有一位認知角落與傾斜面具備標準角相似；旋轉與彎曲路徑脈絡，則只有一半的參與者能夠認知與角有關的相似性。Mitchelmore 與 White (1998) 也有類似的報告，其中交叉與彎曲物體脈絡對，被絕大部分的澳洲兒童（比例為 11/12）認為具有相似性；在傾斜與角落脈絡對，大部分的兒童（比例為 7/12）也認為具有相似性；但旋轉和彎曲路徑脈絡對，則較少有兒童（比例為 3/12）認為它們具有相似性。

表六 參與者認知不同脈絡對中相似性分類的人數

脈絡對	角相似性類型		
	標準角相似	部分的相似	無關的相似
角落與傾斜面	1	1	2
交叉與彎曲物	4	0	0
旋轉與彎曲路徑	2	0	2

說明：表中各細格的最大數為 4，因為每一脈絡對有 4 位參與者。

此外，部分參與者在描述脈絡對的相似性時，會以「尖」、「彎的地方」與「頂點」來表示角。根據 Fuys 等人 (1988) 所做的研究，一些兒童會使用「點」、「頂點」或「三角形」來表示角，是因為兒童的幾何語彙能力不足，而以日常生活的語言來表徵。由本研究的結果顯示，受幾何語彙能力不足的影響，參與本研究的三年級兒童會以日常生活的語言或已具備的幾何語彙來表徵角形。

(二) 模擬兩不同角脈絡的最佳抽象角模型

參與者所選出能同時說明兩不同脈絡的最佳抽象角模型，整理於表七。由於有些參與者選擇二個以上的最佳模型，表中各列數字的和，可能大於 4。

表七 模擬脈絡對的最佳抽象角模型

脈絡對	模擬兩不同具體角情境的最佳角模型							
	1號	2號	3號	4號	5號	6號	7號	拒絕
角落與傾斜	0	0	0	0	0	3	0	1
交叉與彎曲物	1	0	1	0	0	6	0	0
旋轉與彎曲路徑	1	0	2	0	0	1	0	0
合計	2	0	3	0	0	10	0	1

由表中可知，大部分（13/16）的回答不是選擇 3 號就是選擇 6 號模型，即這些回答選擇具備「V」形的抽象角模型；可見，參與者在認知不同角脈絡的相似性時，會選擇與角脈絡明顯具有構造上相似性的模型，如與角形相類似的「V」形模型，或與交叉相似的「X」形模型。此外，由表中也發現在脈絡對中所選取的最佳抽象角模型，較之前一階段在單一角脈絡中所選取者，有集中化的傾向，本階段的選擇多集中在 1 號、3 號和 6 號等三個抽象角模型，顯示參與者已能從脈絡對中的相似性，抽離出較抽象的形概念。

五、造角形活動上的解題表現

參與者的解題表現可分類為標準角造形、部分造角形與無關的造形等三類，其意義如下：

1. 標準角造形：參與者能表徵出共端點的兩直線，亦即呈現出標準角的內涵。
2. 部分造角形：參與者只能造出角形的一個邊。
3. 無關的造形：參與者所造出的角形，與角脈絡屬性無關。例如，畫出凱蒂貓具體角情境中耳朵部分的輪廓。

由於各角脈絡對有四名參與者，每一名參與者將分別使用磁鐵條和紙筆二種工具，造二種角脈絡中的角形，因此每一脈絡對共將有 16 個解答。參與者的造角形活動解題表現整理於表八中。

由表八顯示，在交叉與彎曲物體脈絡對中，所有參與者的造角形活動均歸類為標準角造形，但其中只有 4 個解答能夠給予角形所表徵的意義正確的解釋，認知角形所代表的抽象意義，其比例為 25 %。在角落與傾斜面脈絡對中，有 12 個造角形活動表現被歸類為標準角造形，但其中只有 5 個回答能夠給予角形所表徵的意義正確的解釋，認知角形所代表的抽象意義，其比例為 31%。在旋轉與彎曲路徑脈絡對中，也有

透過具體角情境探討國小三年級學童之解題表現

12 個造角形活動表現被歸類為標準角造形，但只有 3 個回答能夠給予角形所表徵的意義正確的解釋，認知角形所代表的抽象意義，其比例為 19%。

表八 各角脈絡對的造角形活動表現

脈絡對	造角形活動類型		
	標準角造形	部分角造形	無關的造形
角落與傾斜面	12 (75%)	0	4 (25%)
交叉與彎曲物體	16 (100)	0	0
旋轉與彎曲路徑	12 (75%)	1 (6%)	3 (19%)

由以上所述可知，在本階段造角形活動中，三組角脈絡對均有 75%以上的回答，能夠表現出標準角造形，但卻只有不到 31%的回答能夠認知角形所表徵的抽象意義。van Hiele 曾指出當兒童能認識正方形或正方形的命名時，並不見得知道如何給正方形下定義，由本研究的結果發現，對於角的認識，參與者也有同樣的情形。

六、角意義知識的建構

本研究將參與者所建構的角意義分成五種範疇，其內涵如下：

1. 標準一般角定義：能指出角是由兩條共端點的直線所形成的關係，在此定義中蘊含了角的構成要素，並呈現要素之間的關係。此定義具備了角脈絡之間的一致性，而可成為角的上層概念，適用於所有的角脈絡，因此稱為「標準一般角定義」。
2. 標準角定義：能指出角是由兩條共端點的直線所形成的關係，但定義中的要素可能被某些條件所限制了；亦即此定義缺乏各角脈絡之間的一致性，無法適用於所有的角脈絡，但因已指出角的組成包含了兩條直線與頂點，因此稱為「標準角定義」。
3. 脈絡性角定義：只能說明各角脈絡之間的表面（或全形的）相似性，如「尖尖的」等，而未能明確地指出角的構成要素，以之概括不同的角脈絡。
4. 例舉式概念：未能從角脈絡的共同性中主動建構角的意義，卻以課堂上的例證來指出角的位置，這樣的描述只是呈現出一種角位置的概念，而不是具有一般性的定義，因此研究者將之稱為「例舉式概念」。

5. 無關的定義：參與者對於角意義的描述與角概念無關。

根據以上所述，研究者將本研究所採取的角意義分類與 Mitchelmore (1998) 的角概念發展層次，以表(九)來表示其間的對照關係。

表九 角意義的概念發展層次對照表

Mitchelmore (1998) 的角概念發展階段	本研究的角意義分類
階段三 抽象角概念	標準一般角定義
	標準角定義
階段二 脈絡的角概念	脈絡性角定義
階段一 情境的角概念	例舉式概念

(一) 參與者角意義知識的解題表現

參與者在晤談最後階段所建構的角意義，與該角意義的分類，以及各參與者之任課教師本學期角單元的教學內容摘要，整理於表(十)。

表十 參與者所建構的角意義與教師的角教學

脈絡對	參與者建構的角意義	角意義分類	任課教師的角意義教學	任課教師角形的呈現方式
A 組 角落與 傾斜面	A1：尖尖的地方是角。	脈絡性角定義	※幾何圖形說明	※三角形或四邊形等圖形的一個角
	A2：角是尖尖的地方，尖尖的地方是兩畫凸起來。	標準角定義	以標準角的方式說明	三角形或四邊形等圖形的一個角
	A3：鹿的角	無關的角定義	幾何圖形說明	三角形或四邊形等圖形的一個角
	A4：一個三角形頂點的下面。	例舉式角概念	幾何圖形說明	三角形或四邊形等圖形的一個角

透過具體角情境探討國小三年級學童之解題表現

B 組 交叉與 彎曲物	B1：尖的地方是角。	脈絡性角定義	※以標準角的方式說明	※三角形或四邊形等圖形的一個角
	B2：斜線和直線連起來的那個地方就是角。	標準角定義	以標準角的方式說明	一個角
	B3：正方形頂點下面有個角，就是正方形的角。	例舉式角概念	幾何圖形說明	三角形或四邊形等圖形的一個角
	B4：角就是彎曲的地方	脈絡性角定義	以標準角的方式說明	三角形或四邊形等圖形的一個角
C 組 旋轉與 彎曲路 徑	C1：兩個邊合起來就是角。	標準一般角定義	※以標準角的方式說明	※一個角
	C2：要有一個點，旁邊短短的一條線。	標準角定義	幾何圖形說明	三角形或四邊形等圖形的一個角
	C3：三角形有尖尖的就是角。	例舉式角概念	幾何圖形說明	三角形或四邊形等圖形的一個角
	C4：角是尖尖上面那個（指頂點）。	脈絡性角定義	以標準角的方式說明	一個角

說明：表中符號「※」表示該參與者在接受本研究晤談時，尚未接受過與角概念有關的單元教學。

參與者共建構了 12 個角意義，其中屬於標準一般角定義與標準角定義的共有 4 個（分別為參與者 C1、A2、B2 與 C2 所答），由表(十)可知，只有 B2 的回答可能受教師教學的影響，而 A2 的任課教師並未以單一角形教學，角說明的方式也與 A2 所建構的角意義不同，因此除了參與者 B2 之外，三人的回答是在晤談過程中自行建構的，三位參與者在 Mitchelmore 的角概念發展階段上，達到階段三抽象角概念；屬於脈絡性角定義的回答共有 4 個（分別為參與者 A1、B1、B4 與 C4 所答），根據表(十)的分析，所有 4 個回答均與教師的教學無關，因為這些參與者所建構的角意義明顯與教師的角的說明方式不同，因此應可視為參與者所自行建構的，這四個角意義在角概念發展階段上，達到階段二脈絡的角概念；而屬於例舉式概念的有 3 個（分別為參與者 A4、B3 與 C3），由表(十)的分析，發現這三個回答明顯受到教師教學的影響，儘管這三位參與者在造角形活動中，大部分均能造出標準角形，但在回答角的意義時，卻受到教師教學的影響，忽略已造出的角形，而以多邊形的一個角來說明，因此在 Mitchelmore 的角概念發展階段上，是歸類為階段一情境的角概念。

參與者 A4、B4 與 C3，雖然在晤談第五階段的造角形活動中，有 83%的解題被歸

類為標準造角形，17%的回答被歸類為無關的造形，但在聽到研究者正式提到「角」後，三位參與者卻無法調適本身的認知結構，而是以先前的學習經驗來同化研究者所提出的「角」，因此當研究者在本階段要求參與者畫出一個角來說明時，參與者產生了認知衝突，甚至於無法畫出一個角，而只能以其教師教學之內容，以圖形角舉例的方式說明角的位置，可見學校教學對於學生角概念發展影響之重。上述的發現，劉湘川（民 82）在其所主持的「我國國小學童對稱概念的發展研究」中也曾指出，約有 1/2 的三年級學童對於角概念不清楚，視角為一個三角形。

（二）本研究參與者的角概念發展階段

綜合以上的分析，在本研究的三年級參與者中，有四位其角概念的發展已達 Mitchelmore 的角概念發展階段理論的第三階段，具備了抽象的角概念，而且在每一角脈絡對中至少都有一位；有 4 位參與者的角概念發展，達到角概念發展階段理論的第二階段，具備了脈絡的角概念；另有 3 位參與者在角概念發展階段理論中，是歸類為第一階段，也就是情境的角概念。Mitchelmore（1998）指出，大部份兒童在 9 歲時，就已完成角概念發展的第二階段，本研究中有 8 位（72%）三年級的參與者達到第二階段，驗證了 Mitchelmore 的研究；但從本研究的結果顯示，有 1/3（4/12）的參與者其角概念的發展被評為角概念發展階段理論的第三階段，而 Mitchelmore 卻認為此一階段的發展是中學教育的結果，研究者以為此一結果，有必要再做更廣範、且更深入的研究來加以驗證，其一本研究受時間因素的限制，參與者是被隨機分派於三組角脈絡對中之一，參與者並未經驗其它二組角脈絡對的晤談活動；其二參與者是選自該校三年級的數學高成就學生，不符合隨機抽樣的原則，外在效度低；其三在角脈絡對的選擇，以及晤談內容適切性仍有進一步探討的必要。

（三）圖形角、張開角和旋轉角與本研究角概念發展階段的關係

由於國內的初步角概念課程設計，無論是 82 年版的課程標準，或是九十學年度即將正式實施的九年一貫課程，對於兒童角概念的發展，均採取由靜態角而至動態角的觀點，亦即認為國小學童角概念的學習應由圖形角、張開角而至旋轉角循序漸進；若依據 Mitchelmore & White（1998）的具體角情境試探性分類，上述圖形角、張開角和旋轉角，均可視為以數學家的觀點所做的角脈絡分類範疇之一，但是以幾何概念形成的觀點來看，兒童對於圖形角、張開角和旋轉角等概念的形成，仍依循了由具體而抽象的概念形成的理論。本研究所使用的具體角情境材料中包含了圖形角、張開角和旋轉

透過具體角情境探討國小三年級學童之解題表現

角，但本研究的三年級參與者在三組角脈絡對中建構角意義的表現是接近的，換句話說，無論是靜態角或是動態角，參與者從中建構抽象角意義的表現是接近的。

綜合以上所述，具備明顯角形特徵的具體角情境，有助於學童的角知識建構，由此可說明學童意較容易從圖形角中察覺角情境，而較難從旋轉角中察覺角情境；而 Mitchelmore 的角概念發展階段理論的意義在於提供以概念形成的觀點，讓研究者或教師從兒童本身的角度，來重新省思兒童的角脈絡分類與角概念發展架構，從實際行動中探究兒童從真實情境中發展角知識的情形。以本研究的結果來看，參與者從圖形角、張開角和旋轉角中發覺角情境的難易雖有不同，但藉由不同角脈絡具體物的觀察與操作、角情境的擴展、抽象角模擬活動、認知不同角脈絡相似性與造角形活動，三年級參與者仍可從圖形角、張開角和旋轉角中建構出抽象角意義。不過 Mitchelmore 的角概念發展階段理論，仍有待更多的實徵性研究來加以驗證。

肆、結果與建議

一、結果

根據前述的討論，歸納本研究的結果如下：

(一) 具體角情境知識階段的發現

具備明顯的角形特徵之具體角情境，以及良好的幾何語言能力，有助於學童對角知識的建構，以邊長的概念為例，A 組四位參與者的描述分別為「一樣長」、「都斜斜的」、「路平平的」和「都有斜坡」，參與者對於「邊長」意義的認知不足，無法協助參與者注意到情境中的「邊長」屬性；而學童「全無」的概念是否發展完成，影響學童對於 0 度角的認知；此外，情境知覺的統合是否完成，影響參與者對於情境中某一概念的認知是否一致。

(二) 具體角情境擴展階段的發現

角落、傾斜、旋轉和彎曲路徑等四種角脈絡，對於三年級參與者而言，具備明顯的個別脈絡屬性，角情境可依上述四種角脈絡進行分類；而彎曲物體與交叉二角脈絡之脈絡屬性，參與者並不容易知覺。此外，具體角情境的表面性特徵，為參與者分類角情境的主要依據。

(三) 抽象角模擬活動階段的發現

在彎曲物體角脈絡的標準角模擬上，參與者使用 3 號和 6 號模型兩種模型模擬角

情境時，表現出標準角模擬的次數較高，至於其他角脈絡，七個模型的表現則沒有明顯差異。在參與者所選取的最佳抽象角模型中，3 號和 6 號抽象角模型被選取的次數較高。至於參與者認知角脈絡中標準角的難易度，由易而難，依序為交叉脈絡、角落脈絡、彎曲物體脈絡、彎曲路徑脈絡、傾斜與無限制旋轉脈絡。

(四) 認知脈絡對相似性階段的發現

參與者所選擇的最佳角模型較前一階段，有集中化的趨勢，參與者傾向選擇與角脈絡明顯具有構造上相似性的抽象角模型，如與角形相類似的「V」形模型，或與交叉相似的「X」形模型。回答角脈絡對相似性的問題時，以交叉與彎曲物體脈絡對的回答具有標準角相似性的比例最高；角落與傾斜面脈絡對以及旋轉與彎曲路徑脈絡對，則各有一半的參與者認為其具有標準角的相似性。受幾何語彙能力不足的影響，參與者以日常生活語彙描述角形，例如以「尖」、「彎的地方」與「頂點」來表示脈絡對所具有的角形「相似性」。

(五) 造角形活動階段的發現

參與者較容易從交叉與彎曲物體脈絡對中，抽離出抽象角形，而其它二脈絡對中的造角形表現相接近。參與者對於角概念的認知，是「形」先於「定義」的。在 Mitchelmore 與 White (1998) 的類似研究中，只要參與者能以抽象角模型對齊具體角情境中的角，便被歸類為已認知具體角情境中的標準角；本研究以為，上述的表現只能表示參與者認知兩者的相似形，並不必然表示參與者已認知其抽象意涵，也就是大部分的參與者仍未建構出角形的抽象意義（即角的定義）。

若根據 Mitchelmore 與 White (1998) 的評定規準，參與者在造角形活動中，顯示有較高比例的解題能認知角脈絡對中的標準角，亦即經由造角形活動，大部分的參與者已掌握「角形」的構造特徵。

(六) 建構角意義知識階段的發現

本研究的結果顯示，部分參與者受認知基模的影響，阻礙了新概念的建構，雖然大部分的參與者在經歷五個晤談階段後能夠造出標準角形。而透過適當的學習情境設計，參與者是有可能建構出抽象化的角概念。本研究的十二名參與者其角概念的發展，平均分佈於 Mitchelmore 與 White (1998) 角概念發展理論的三個階段中。而角概念發展階段理論的意義在於提供以概念形成的觀點，讓研究者或教師從兒童本身的角度，來重新省思兒童的角脈絡分類與角概念發展架構。三年級參與者藉由不同角脈絡具體

透過具體角情境探討國小三年級學童之解題表現

物的觀察與操作、角情境的擴展、抽象角模擬活動、認知不同角脈絡相似性與造角形活動，有助於其從不同的角脈絡中建構出抽象的角意義。

二、建議

由本研究發現，三年級學童也可以學習不同脈絡的角，像是張開角或旋轉角，而不單是圖形角。因此，爲了避免學童形成角的迷失概念，以致於妨礙角概念的學習，建議課程中應安排多樣化角脈絡的學習情境。在課程設計方面，圖形角的課程設計上有必要做適當的修正，引入「兩個邊相交於一點」之整體角形的認識。而在教學設計方面，教師應發展學童對幾何相關語彙的了解，可透過適當的輔助工具或活動設計，讓學童建構抽象化的角概念。此外，在評量活動方面，由本研究中可發現，學童在晤談的各個階段，無法以成人社群的用語來表達，而透過適當的教學設計，三年級參與者能夠從不同的角脈絡的中抽離出抽象的角，具備了良好的角知識，可見，傳統的紙筆評量不僅無法真正有效測量學童的認知結構，也由於評量的方式限制了教學的多樣化，教師宜採取變通性的評量，才能夠有效地評量學童對角知識的認知結構。

參考文獻

- 柯慶輝（2000）：**國小三年級學童具體角情境解題之研究**。國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文。
- 國立編譯館（1999）：**國民小學數學教學指引第六冊（三下）**。國立編譯館。
- 教育部（1993）：**國民小學課程標準**。台北：台捷。
- 教育部（2000）：**國民中小學九年一貫課程暫行綱要**。教育部印製。
- 陳澤民（1995）：**數學學習心理學**。台北縣：九章出版社。原著：Richard R.Skemp (1987).
The Psychology of Learning Mathematics.
- 劉好（1996）：**角的課程設計原理**。國立嘉義師範學院：**84 學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編**，56-64。
- 劉秋木（1996）：**國小數學科教學研究**。台北：五南圖書出版公司。
- 劉湘川（1993）：**我國國小學童對稱概念的發展研究**。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告，計畫編號：NSC 82-0111-S-142-001。
- Close, G. S. (1982). *Students' understanding of angle at the elementary/secondary transfer stage*. Unpublished master's thesis, Polytechnic of the South Bank, London.(ERIC Document Reproduction Service No. ED 221383)
- Krainer, K. (1993). Powerful tasks: A contribution to a high level of action and reflecting in mathematics instruction. *Education Studies in Mathematics, 24*, 65-93.
- Magina, S. (1994). *The Factors which Influence Children's Conception of Angle*. Unpublished doctoral dissertation, Institute of Education, University of London.
- Mitchelmore, M. & White, P. (1998): Development of Angle Concepts: A Framework for Research. *Mathematics Education Research Journal, 10*(3). 4-27.
- Mitchelmore, M. (1989). *The Development of Childrens Concepts of Angle*. Bavarian Academy of Sciences, Munich.
- Mitchelmore, M. (1997). Children's informal knowledge of physical angle situations. *Learning and Instruction, 7*, 1-19.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The national council of teachers of mathematics. Inc. Reston, VA:

透過具體角情境探討國小三年級學童之解題表現

Authors.

van Hiele (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics*. Education Academic Press Inc., London.

Wilson, P. S. & Admas, V. M. (1992). A dynamic way to teach angle and angle measure. *Mathematics Teacher*, 39(5), 6-13.

附錄(一) 晤談大綱（以菱形板為例）

階段一 情境：菱形板 參與者：_____

組別：_____ 日期：__月__日 時間：__時__分 至 __時__分

1. 如果大菱形面中有一片損壞了，能不能用這一塊菱形板（30度）取代？
2. 你覺得哪些地方不一樣呢？
3. 有什麼不一樣呢？
4. 還有哪些地方不一樣呢？
5. 能不能用這一片菱形板（60度）代替？
6. 如果讓你用這一片（60度），自己修改，來替代不見的那一片（45度），你會怎麼做？這是一張同樣的用紙做成的，你畫畫看你會改哪裡？
7. 跟修改前有什麼不同？
8. （問題同上）
9. 這些菱形板有哪些不同的地方？
10. 你覺得這三片菱形板哪一片最剛好？
11. 請你說說看哪些地方是剛好的。
12. （尖尖的地方在哪裡呢？）
13. 哪一塊是最尖的菱形板呢？

Investigating Third Grade Children's Problem Solving Performance Using Physical Angle Situations

Ching-hui Ka¹ Shuk-Kwan Susan Leung²

¹Kung Ming Elementary School

²Institute of Education National Sun Yat-Sen University

Abstract

This purpose of this study is to understand how children describe the implicit angles embedded in different physical angle situations. The researcher adopted the clinical interview method and used six realistic situations as materials. Twelve elementary school children were randomly assigned into three groups and interviewed, for six stages, for their conceptions of angles. The factors affecting their conceptions were found to be: the individuals experiences, language abilities, "zero degree" concept, perceptual integration, and cognitive schema. Situation factors include a variety of angle situation, physical angle situations and the superficial similarities of the physical angle situations. All the above factors influenced students' development of angle concepts. Research results also showed that children first learn about shape of angle then it's definition. Participants' angle development spread equally among three stages of Mitchelmore's theory of angle development: situated angle concepts, contextual angle concepts and abstract angle concepts.

Third grade students formed their angle concepts according to various steps. First, they perceived the similarities of angles by observing and operating physical object of different angle

contexts. Second, they classified angles by extending the angle situation. Third, they abstracted the shape of angle from the physical object and formed the mental image of the abstract angle by abstract angle modeling and angle configuration construction. Fourth, they represented the abstract angle by symbol form (drawings) or verbal form. According to the results of this study, it is possible for us to incorporate curriculum design so that third grade students can extract and get the concept of abstract angle.

Key words: angle situations, angle contexts, development of angle concepts.