多重式比例問題的解題分析：相等比值或相等比率

馬秀蘭
嶺東科技大學 企管系

（投稿日期：94 年 8 月 28 日；修正日期：94 年 9 月 12 日；接受日期：94 年 11 月 10 日）

摘要

本文目的乃在探討與分析國小六年級學生在解決多重式比例問題的型態，尤其從「相等比值」或「相等比率」兩個向度作比較。當該比例問題之關係式可寫為「c1:(a1×b1)= c2:(a2×b2)」時，本研究已知的條件「c1/(a1×b1)」為一整數。研究結果顯示，有的學生在解決「多重式比例」問題時，會先考慮是否能由「簡單式比例」問題來解決，但是較多學童一開始就是利用「多重式比例」問題的架構解題。其中雖然學童多利用「相等比率」概念的「單價法」去解決問題，但如此方法乃看不出他們是否真正瞭解「多重式比例」之意義；較少學童利用「相等比值」概念的「倍數法」解題。然而值得注意的是有的學生不識「多重式比例」問題的架構，或有的只有「相等比值」或「相等比率」一種的認知結構而已。

關鍵詞：多重式比例問題、相等比值、相等比率

一、緣由與目的

比例(proportion)概念為基礎數學與高等數學的分水嶺(Lesh, Behr, & Post, 1988;Lamon, 1993),亦是問題解決中的一個極重要技巧(Orton, 1992)。美國 NTCM(2000)指出,無論是在數與計算、代數或測量等領域,6-8 年級階段均強調比例概念的重要性。我國教育部(2003)在九年一貫課程綱要中之國小五、六年級的階段也強調培養學生的比例推理能力,以進一步的發展對數學問題或未知數問題之各種解題策略。因此比例廣泛的出現在中小學的數學主題中,例如:分數、單價、速率、(公)因(倍)數、相似三角形、比值和百分率等,皆是學生在其數學課程中會接觸到的。但是雖然學童在他們極早的數學生涯就接觸到比例,卻在了解比例關係的本質上及分辨有無比例關係上皆產生困難(Greenes & Findell, 1999),而且他們經常對與比例相關的分數、比(比值)、比率或比例有認知的混淆。

因此本文的目的乃在藉由分析學生解決多重式比例問題「c1:(a1×b1)= c2:(a2×b2)」的型態(其中已知的條件「c1/(a1×b1)」為一整數),去探討學童內在之認知結構,尤其從「相等比值」或「相等比率」兩個向度作比較,並從數值類型(整數倍或非整數倍)的差異作解析。

二、研究理論基礎

(一)分數、比/比值、比率及比例的闡述

一般若要探討「多重式比例」問題就須追溯到「簡單式比例」問題,進而到「比例」問題。Lo 和 Watanabe(1997)指出,有利於發展比例基模的數學知識有:數字的結構(例如:因數和倍數)、熟悉各種乘法和除法的情境,包括等分除與包含除、及有理數(分數、小數..等)概念的整體發展。因而「比例」可說是「分數」的另一面相,但已有研究指出分數的教與學不僅非常困難,且是一個令人沮喪的失敗(Davis, Hunting & Pearn, 1993),而且我國國小六年級學童不擅於處理「分數」的運算(馬秀蘭,2001)等,因此本節將從分數(fraction)的概念出發,進而到與本文有關的比/比值(ratio)、比率(rate)及比例(proportion)的概念。以下將以 $\frac{2}{5}$ 為例去闡述之。

1. 當其考慮到被分割之量 (divided quantity 或 partitioned quantity),則其為「分數」;其涉及到一全體的量(quantity)被分割成一些相同大小之部份(Smith III, 2002)。故當一個披薩被平均分成大小相同之五份,則其中兩份佔 $\frac{2}{5}$;此時 $\frac{2}{5}$ 即被視為分數。

2. 當一個值涉及到兩個量之乘法關係,即一個量是另一個量的多少倍大或小時,則其為「比/比值(ratio)」(Smith III, 2002)。如每 2 支紅筆就有 5 支藍筆,或每 6 支紅筆就有 15 支藍筆,此時紅筆是藍筆的 $\frac{2}{5}$ 倍;此時 $\frac{2}{5}$ 即被視為比/比值。

3. 當上述「比/比值(ratio)」是指相同種類量數(數或計量)之大小比較時,則「比

率(rates)」是指兩個不同計量(measures)的一種對應(Frobisher, et al., 1999)，如速率、密度等。故當小明騎車之速率一致時，當他五小時騎了二公里路程，則「$\frac{2}{5}$公里/小時」即為其速率；此時$\frac{2}{5}$即被視為比率。

4. 當關係到一量之部份與其全體的比較時，則其為「比例(proportion)」，如$\frac{2}{5}$(或2:5)這一個比/比值(ratio)可產生7中的2與7中的5之比例 (Frobisher, et al., 1999)。而一般所謂之「比例(proportion)」則是指兩個相等比值或相等分數的敘述，其表示法可如「$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$」或「2:5=6:15」，可被讀為「2對5如同6對15」或「2和5之比值是相等於6和15之比值」(Van de Walle, 1998)。

（二）比例問題之結構、語意型態與解法

比例問題之類型若以問題的結構型態來看，可以分為「簡單式比例」與「多重式比例」兩種型態。簡單式比例的問題只涉及到兩個度量空間，其比例關係式為「a:b＝c:d」，例如：「在麥當勞120元可以買8份蘋果派，那請問90元可以買多少份蘋果派？」這類問題。而其關係式「a:b＝c:d」之比值型態可以分成c同時是a和b的整數倍、僅b是a的整數倍、僅c是a的整數倍、以及c不是a或b的整數倍等四種(翁宜青, 2002)。

而多重式比例(multiple proportion)之概念源自Vergnaud(1983)，其涉及到三個度量空間，而且其中的兩種量數與第三種量數成比例關係，即「(a1×b1):c1=(a2×b2):c2」或「c1:(a1×b1)= c2:(a2×b2)」，例如：「4人5天中共可種60棵樹，假設每人每天的工作量都一樣，請問4人10天可種幾棵樹？」這類問題。

至於比例問題以語意型態來分可分為完整合成的測度（well-chunked measures）、部分-部分-整體（part-part-whole）、聯想的集合（associated sets）以及擴張縮小（stretcher and shrinker）等四種(Lamon, 1993），或周筱亭和黃敏晃(2002)所謂之交換問題、組合問題、母子問題以及密度問題四種。所謂「交換問題」：即以物易物之問題情境。「組合問題/聯想的集合」：即問題中兩個量數之間並沒有明顯的意義關係，經過問題清楚的陳述後才產生關係。「母子問題/部分-部分-整體」：即一個集合（整體）是由兩個以上的部分集合所組成。「密度問題/完整合成的測度」：即問題係由兩個外延量所組合的比率關係而產生一個內含量的量數。「擴張縮小」：即問題中一個量數隨著另一個量數增加或縮小，且兩個量數之間有固定的比值。

Behr, Harel, Post, & Lesh(1992）指出，「單項單位（singleton unit)」或「複合單位（composite unit)」可被用來解決比例問題。而前者一般謂之「單價法」，後者謂之「倍數法」。其中「單價法」或「單位比率法(unit-rate method)」是將單一物體當成一個單位的單項單位（Behr et al.,1992）來使用，其是利用上述之「相等比率」結構來題解。而「倍數法」是把幾個物體當成一個單位(如五個一數)的複合單位來使用，即以比例運算式中同項之間的「倍數」概念來進行，其是利用上述之「相等比值」結構來題解；此種解題策略亦可稱為間策略(between category) (Noelting, 1980a, 1980b)、函數法(function categority)(Vergnaud, 1983)。

因此學生若視$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$為「相等比率(equal rates)」，則其使用單位比率(unit rate)為$\frac{2}{5}$之「單價法」；若視$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$為「相等比值(equal ratios)」，則其採用待求量是原量的$\frac{2}{5}$倍之「倍數法」，其中原量即被看成是一複合單位。

三、研究方法

本研究樣本為 32 位國小六年級學生，其中 20 位來自南投縣某國小，12 位來自台中市某國小。他們均接受 82 年版新課程，且因自三年級起就上電腦課，因此他們都具有一般文書處理及上網的基本能力。

本研究的溝通管道為架構在 FreeBSD 4.3 下的網路佈告欄系統，使用者必須以自己的帳號和密碼登入系統。研究期間，在考量兩所樣本學校舉辦的多項活動以及學生的反應進度下，研究群不定期的(大約 2~4 週)在網路佈告欄上依序張貼 8 個比例問題，以便讓學生能在互動的環境中重複的進行推理解題。學生可利用在校彈性時間、午休或是在家中的時間上網進行比例推理活動，為期近一學年。在 8 個問題中只有《第四題》分工合作-屬於多重式比例問題結構，其語意型態為組合/聯想的集合題型。圖 1 所示即為網路上《第四題》的內容。

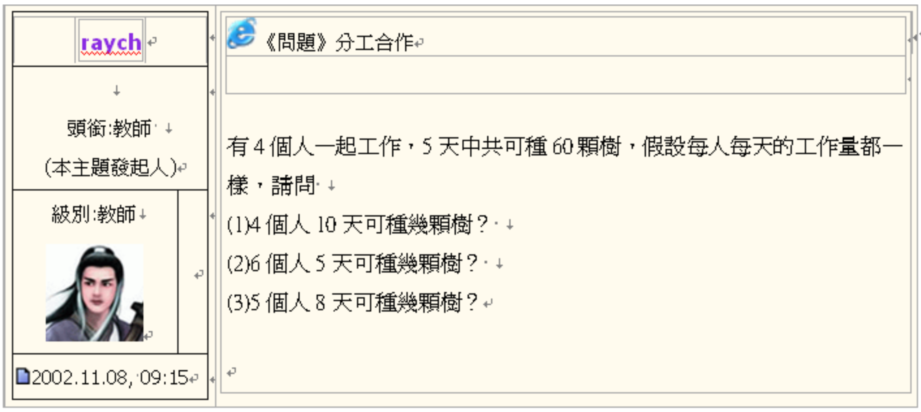

圖 1

由題意可知，該多重式比例問題之關係式為「c1:(a1×b1)= c2:(a2×b2)」，其比值型態為 a1、b1、a2、b2 (視為 a，b)和 c1 已知，欲求 c2，其中 c1/(a1×b1)是整數，即 60/(4×5)是整數，並分成下列三種類型：(1)小題中，4 個人固定，10 天是 5 天的整數倍；即 a、b 其中一量固定，另一量變為整數倍，求 c2 量的問題。(2)小題中，5 天固定，6 個人是 4 個人的非整數倍；即 a、b 其中一量固定，另一量變為非整數倍，求 c2 量的問題。(3)小題中，5 個人是 4 個人之非整數倍，8 天是 5 天的非整數倍；即 a、b 兩量同時變為非整數倍，求 c2 量的問題。

四、結果與討論

本研究之活動是透過網路佈告欄進行，在此互動的環境中，學生可以隨時隨地的在佈告欄上張貼其解題內容。學生在解題之餘，也會觀摩他人的錦囊妙計；一段時間後，他們針對同一個比例問題，可能會繼續張貼原始解法的修正版或不同的解法。因而本文不作學生的各類解題現象量數之統計，而將只以學生張貼在網路佈告欄之原案內容作分析，尤其從「相等比值」或「相等比率」兩個向度作比較，並從數值類型(整數倍或非整數倍)的差異作解析，以探討學童內在之認知結構。其中表格內之【bm2】、【gh3】、【mg12】…等均為學生在網路上之匿名之帳號，呈現之內容即為學生在佈告欄內的原案。

(一) 從「相等比值」或「相等比率」兩個向度作比較

(1)小題： 4 個人 5 天 60 棵，4 個人 10 天可種幾棵樹？

1. 部份學生會視其為 4 人固定，「5 天 60 棵，10 天△棵」之簡單式比例問題。其中由於 60 同時是 10 和 5 的整數倍，10 也是 5 的整數倍，故學生解題的方法會因其考量的向度而異。

(a) 大多數學生視 $\frac{10}{5}=\frac{\Delta}{60}$ 為「相等比值」，他們看出 10 是 5 的整數倍，故採用待求量是原量之 2 倍的「倍數法」，即將原量「60 棵/5 天」當成一個複合單位。此時單位量為 60 棵，單位數為 2。例如：

(1)【bm2】 10 除以 5=2，2 乘以 60=120	(1)【gh3】10 是 5 的兩倍 ( )是 60 的兩倍，60 乘 2=120
(1)【mg12】 因為 5*2=10，60*2=120	(1) 【bh2】 4=>5=>60 4=>10=>( ) 10 除以 5 等於 2，2 乘以 60 等於 120

(b) 少數學生視 $\frac{60}{5}=\frac{\Delta}{10}$ 為「相等比率」，他們看出 60 是 5 的整數倍，而使用將「12 棵/1 天」當成一個單項單位，單位數為 10(天)之「單價法」。例如：

(1)【mgh1】 六十除以五等於十二，十二乘以十等於一百二十

2.部份學生不考量各數字間之倍數關係，而利用多重式比例問題的架構解題，即視 $\frac{60}{5}\Big/4=\frac{\Delta}{10}\Big/4$ 為「相等比率」，採用「3 棵/1 人 1 天」當成一個單項單位之「單價法」。而單位數採「先 4，後再乘以 10」方式處理，其只是將 a1 及 b1 或 a2 及 b2 先後各自考量，而非將 a1 及 b1 或 a2 及 b2 同時考量，故看不出這些學生是否真正瞭解 c1:(a1×b1)= c2:(a2×b2)之意義。例如：

(1)【gh1】60 除 5 是 12，12 除 4 是 3，就是 1 人 1 天種 3 棵 3 乘 4 是 12，12 乘以 10 是 120， 答:120 棵

(2)小題: 4 個人 5 天 60 棵，6 個人 5 天可種幾棵樹？

1. 部份學生會視其為 5 天固定，「4 人 60 棵，6 人△棵」之簡單式比例問題。

(a) 少數學生視$\frac{6}{4}=\frac{\Delta}{60}$為「相等比值」，而 6 是 4 的$\frac{6}{4}$倍，故採用待求量是原量之$\frac{6}{4}$倍的「倍數法」，即將原量「60 棵/4 人」當成一個複合單位。此時單位量為 60 棵，單位數為$\frac{6}{4}$。例如：

(2)【bh2】 4=>5=>60
6=>5=>( )
6 除以 4 等於 4 分之 6 ，4 分之 6 乘以 60=40　答:40 棵

筆者註：【bh2】最後之結果計算錯誤。

(b) 少數學生視$\frac{6}{4}=\frac{\Delta}{60}$為「相等比值」或「相等分數」，使用交义相乘(cross multiplication)法。例如：

(2) 【bm2】 60 乘以 6=360，　　360 除以 4=90

(c) 在此小題裡，沒有學生採用$\frac{60}{4}=\frac{\Delta}{6}$為「相等比率」之觀點。

2. 大多數學生因考量 6 不是 4 的整數倍，故利用多重式比例問題的架構解題，即視$\frac{60}{5}\Big/4=\frac{\Delta}{5}\Big/6$為「相等比率」，將「3 棵/1 人 1 天」當成一個單項單位之「單價法」；而單位數採「先 6，後再乘以 5」方式處理；同樣的，其只是將 a1 及 b1 或 a2 及 b2 先後各自考量，故看不出這些學生是否真正瞭解 c1:(a1×b1)= c2:(a2×b2)之意義。例如：

(2)【mgh1】六十除以五等於十二 ，十二除以四等於三
三**乘以六**等於十八 ，十八**乘以五**等於九十 ，A:九十棵樹

(3)小題： 4 個人 5 天 60 棵，5 個人 8 天可種幾棵樹？

幾乎所有學生均因待求的“5 人 8 天”與已知的“4 人 5 天”兩者相對應的人或天沒有整數倍關係，故利用多重式比例問題的架構解題。

(a) 大多視$\frac{60}{5}\Big/4=\frac{\Delta}{8}\Big/5$為「相等比率」，直接使用「3 棵/1 人 1 天」當成一個單項單位之「單價法」；因其單位數採「先 5，後再乘以 8」方式處理；同樣的，看不出這些學生是否真正瞭解 c1:(a1×b1)= c2:(a2×b2)之意義。例如：

(3)【mgh1】六十除以五等於十二 ，十二除以四等於三
三乘以五等於十五 ，十五乘以八等於一百二十 ，A:一百二十棵

(b)【bm2】視 $\frac{60}{4\times5}=\frac{\Delta}{5\times8}$ 為「相等比率」，即使用將「3 棵/1 人 1 天」當成一個單項單位之「單價法」，而單位數直接採取「5x8」方式處理，此反應該生真正瞭解 c1:(a1xb1)= c2:(a2xb2) 之意義，因他除了知 a1 及 b1 或 a2 及 b2 可先後各自考量之外，亦知可將 a1 及 b1 或 a2 及 b2 同時考量，即考量(a1xb1)或(a2xb2)。例如：

(3)【bm2】60 除以 5=12 ， 12 除以 4=3
5 乘以 8=40 ， 40 乘以 3=120 ，答 120 棵

(c)只有【bm2】視 $\frac{5\times8}{4\times5}=\frac{\Delta}{60}$ 為「相等比值」。因不考慮「天」或「人」，直接用〝8 天/4 人〞，而 8 是 4 的 2 倍，因此採用待求量是原量之 2 倍的「倍數法」，即將原量「60 棵/(4 人 5 天)」當成一個複合單位。此時單位量為 60 棵，單位數為 2。此亦反應該生真正瞭解 c1:(a1xb1)= c2:(a2xb2) 之意義，即他知可考量(a1xb1)或(a2xb2)。例如：

(3) 【bm2】 8 除以 4=2 ，60 乘以 2=120

筆者註： 此題【bm2】有上述(b) & (c)兩種不同解法。

(二) 從數值類型(整數倍或非整數倍)的差異作解析

學生在解決多重式比例問題時，其採用之方法會受學童內在之認知結構是「相等比值」或「相等比率」所影響；但實際上不少學童在解比例問題時，並非是以「相等比值」或「相等比率」為出發點，反而他們考量的是待求量與已知量二者相對應之條件是否為「整數」倍數(或因數)，以此來決定解題方式。在(1)小題中，10 天是 5 天的整數倍，多數學童使用「倍數法」解題，此間接的視 $\frac{10}{5}=\frac{\Delta}{60}$ 為「相等比值」；但在(2)小題中，因 6 個人不是 4 個人的整數倍，以及在(3)小題中，相對應的人或天均沒有整數倍之關係存在，多數學童則使用「單價法」解題，即視 $\frac{60}{4}\Big/5=\frac{\Delta}{6}\Big/5$ 和 $\frac{60}{4}\Big/5=\frac{\Delta}{5}\Big/8$ 為「相等比率」，即使用將「3 棵樹/1 人 1 天」當成一個單項單位，再各乘以單位數之「單價法」。例如：

(3)【mbh1】四個人五天 60 顆
四個人十天哪就是一百二十。
六個人五天等於...(**一個人一天三顆**)六個人一天 18 顆,五天等於 90。
五個人一天 15 顆，八天等於 120。

(三) 只有「相等比率」或「相等比值」一種的認知結構

1. 只有「相等比率」的認知結構

有的學生無視題意中之待求量與原量之間是否有整數倍關係存在，他們完全不考量「相等比值」之架構，卻至始至終只以「相等比率」架構 $\frac{60}{4}\Big/5=\frac{\Delta}{4}\Big/10$ 、$\frac{60}{4}\Big/5=\frac{\Delta}{6}\Big/5$ 和 $\frac{60}{4}\Big/5=\frac{\Delta}{5}\Big/8$ 去解題，即將「3 棵樹/1 人 1 天」當成一個單項單位，再各乘以單位數之「單價法」。因而看不出學生是否瞭解多重式比例問題的架構，例如：

【gh1】4 人 5 天種 60 棵 **60 除 5** 是 12 ，**12 除 4** 是 3 ，就是 1 人 1 天種 3 棵
(1) 3 乘 4 是 12，12 乘以 10 是 120， 答:120 棵
(2) 3 乘 6 是 18，18 乘以 5 是 90 ，答:90 棵
(3) 3 乘 5 是 15，15 乘以 8 是 120， 答:120 棵

筆者註：【gh1】之"60 除 5"及"12 除 4" 的錯誤，應該為"60 除以 5"及"12 除以 4"。

2. 不認識多重式比例問題，只有「相等比值」的認知結構

有的學生缺乏對多重式比例問題架構的認識，他們大都忽略題目中較遠的「人數」，而將 3 個小題完全視為只有「天數與棵數」兩個向度之簡單式比例的問題；並且無論待求量與原量之間是否有整數倍，其均以「相等比值」，$\frac{10}{5}=\frac{\Delta}{60}$ 、$\frac{5}{5}=\frac{\Delta}{60}$ 和 $\frac{8}{5}=\frac{\Delta}{60}$ 的認知結構去解題，完全不考量「相等比率」。例如：

【bm4】4 人→5 天→60 棵
4 人→10 天→(60)棵⟶**10 除於 5** 等於 2 60 再乘於 2 等於 60
6 人→5 天→(60)棵⟶**5 除於 5** 等於 1 60 再乘於 1 等於 60
5 人→8 天→(48)棵⟶**8 除於 5** 等於 5 分之 8 5 分之 8 在乘於 60 等於 48

【bh2】(3) 4=>5=>60
5=>8=>( )
8 除以 5 等於 5 分之 8，5 分之 8 乘以 60 等於 96 答:96 棵

筆者註：【bm4】在(3)小題中的最後結果 48 計算錯誤。

五、結論與建議

在(1)小題中，有些學生會視其為 4 人固定，而「5 天 60 棵，10 天△棵」之簡單式比例問題。大多數學生看出 10 是 5 的整數倍，而使用將原量「60 棵/5 天」當成一個複合單位，單位數為 2 的「倍數法」。雖然 60 是 5 的整數倍，卻極少學生使用「12 棵樹/1 天」為單項單位，單位數為 10(天)之「單價法」。也有部份學生不考量各數字間之倍數關係，而利用多重式比例問題的架構解題，即將「3 棵樹/1 人 1 天」當成一個單項單位，單位數為「先 4，後再乘以 10」之「單價法」。

在(2)小題中，有些學生會視其為 5 天固定，而「4 人 60 棵，6 人△棵」之簡單式

比例問題。雖然 6 不是 4 的整數倍，少數學生仍採用將「60 棵樹/4 人」當成一個複合單位，單位數為$\frac{6}{4}$之「倍數法」。也有使用“$60\times6=360$ $360\div4=90$”之「交义相乘法」。然而大多數學生不考量各數字間之倍數關係，而是利用多重式比例問題的架構解題，即將「3 棵樹/1 人 1 天」當成一個單項單位，單位數為「先 6，後再乘以 5」之「單價法」。

因此在(1)、(2)小題中，採用「倍數法」之學生，視$\frac{10}{5}=\frac{120}{60}$或$\frac{6}{4}=\frac{90}{60}$為「相等比值」，他們認為此為一大小改變之問題，此亦反應學生具有擴張(stretch)比值之思考。而採用「單價法」之學生有兩類，一類視$\frac{60}{5}=\frac{120}{10}$為「相等比率」，他們認為此為一單位量為「12 棵樹/1 天」，單位數為 10(天)之問題；另一類則視 $\left.\frac{60}{5}\middle/4\right. = \left.\frac{120}{10}\middle/4\right.$ 或 $\left.\frac{60}{5}\middle/4\right. = \left.\frac{90}{5}\middle/6\right.$ 為「相等比率」，他們認為此為一單位量為「3 棵樹/1 人 1 天」，單位數為「先 10，後再乘以 4」或「先 5，後再乘以 6」之問題。從其解法知其利用多重式比例問題的架構解題，然而却不知這些學生是否真正瞭解 $c1:(a1\times b1)= c2:(a2\times b2)$之意義？

在(3)小題中，所有學生(【bm2】例外)均因待求的“5 人 8 天”與已知的“4 人 5 天”兩者相對應的人或天沒有整數倍關係，而直接使用「3 棵樹/1 人 1 天」當成一個單項單位，單位數為「先 5，後再乘以 8」之「單價法」，即視 $\left.\frac{60}{5}\middle/4\right. = \left.\frac{120}{8}\middle/5\right.$ 為「相等比率」。同理亦不知這些學生是否真正瞭解 $c1:(a1\times b1)= c2:(a2\times b2)$之意義？

然而唯一可以從解題原案中確定學生瞭解 $c1:(a1\times b1)= c2:(a2\times b2)$之意義者為【bm2】在(3)小題中之表現。因【bm2】不像其他學生只是先後各自考量 a1 及 b1 或 a2 及 b2；第一次他視$\frac{60}{4\times5}=\frac{120}{5\times8}$為「相等比值」，而採用單位數為 40（即 5×8)的「單價法」。第二次他視$\frac{5\times8}{4\times5}=\frac{120}{60}$為「相等比值」，且 8(天)是 4(人)之 2 倍，而採用單位數為 2 之「倍數法」。由此可反應【bm2】可將 a1 及 b1 或 a2 及 b2 同時考量，即考量($a1\times b1$)或($a2\times b2$)。

然而值得注意的是少數學生不識「多重式比例」問題的架構，他們只有「簡單式比例」問題的認知，並完全以「相等比值」，$\frac{10}{5}=\frac{120}{60}$、$\frac{5}{5}=\frac{60}{60}$和$\frac{8}{5}=\frac{96}{60}$，架構之「倍數法」去解題。也有少數學生不知其是否真正瞭解多重式比例問題的架構，他們至始至終

只以「相等比率」，$\frac{60}{4}\Big/5 = \frac{120}{4}\Big/10$ 、$\frac{60}{4}\Big/5 = \frac{90}{6}\Big/5$ 和 $\frac{60}{4}\Big/5 = \frac{120}{5}\Big/8$ 架構之「單價法」解題。此表示這些學童只有「相等比值」或「相等比率」一種的認知結構而已。

因此由上分析結果可知，部份國小六年級學生在解決「多重式比例」問題時，會先考慮是否能由只有兩個度量空間之「簡單式比例」問題來解決。而解題時，學生採用之方法會受「相等比值」或「相等比率」的看法所影響，也會受待求的與已知的二者相對應之條件是否為「整數」倍數(或因數)所影響，也會受學生是否有「多重式比例」問題的認知所影響。當學童利用「多重式比例」問題的架構解題，一般採用的多是「單價法」，其乃視 $\frac{c_1}{a_1}\Big/b_1 = \frac{c_2}{a_2}\Big/b_2$ 為「相等比率」；如此方法看不出學生是否真正瞭解「多重式比例」之意義。若採用視 $\frac{c_1}{(a_1 \times b_1)} = \frac{c_2}{(a_2 \times b_2)}$ 為「相等比率」之「單價法」，或視 $\frac{(a_2 \times b_2)}{(a_1 \times b_1)} = \frac{c_2}{c_1}$ 為「相等比值」之「倍數法」；此表示學童知 a1 及 b1 或 a2 及 b2 可先後各自考量之外，亦可將 a1 及 b1 或 a2 及 b2 同時考量，即考量(a1xb1)或(a2xb2)，故其才是真正瞭解「多重式比例」的意義。

因而當教師們在進行「多重式比例」問題教學時，除了介紹其架構之外，更須對其意義多作解釋，並應多給例子以作說明。最後期盼本文能給教師們作教學參考之用。

*本文係國科會補助專題研究計畫(*NSC 91-2520-S-275 -002*，計劃主持人：馬秀蘭)之部份成果。*

參考文獻

周筱亭和黃敏晃 (2002)：<u>國小數學教材分析-比(含線段圖)</u>。台北：國立教育研究院籌備。

翁宜青 (2002)：<u>一位國小三年級學生解比例問題之研究</u>。嘉義：嘉義師院國民教育研究所碩士學位論文(未出版)

馬秀蘭 (2002)：<u>利用電腦網路誘發及培養學生對比例推理之興趣及能力之研究</u>。行政院國科會專題研究計畫。(NSC 91-2520-S-275 -002)

馬秀蘭(2001)：透過電腦網路來發展數學加減法問題之研究。<u>科學教育學刊</u>, <u>9</u>(4), 375-399。

教育部(2003)：<u>九年一貫數學領域修訂綱要草案</u>。http://tms.math.ntu.edu.tw/math/。

Behr, M. J. Harel, G. Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, proportion. In D.A. Grouws (ed.): *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. pp.296-333. New York: MacMillan.

Davis, G., Hunting, R. P., & Pearn, C. (1993). What might a fraction mean to a child and how would a teacher know? *Journal of Mathematical Behavior*, *12*, 63-76.

Frobisher, L. Monaghan, J. Orton, A. Orton , J. Roper, T., &.Threlfall, J. (1999). *Learning to teach number: A handbook for students & teachers in the primary school*. United Kingdom: Stanley Thrones Pub Ltd.

Greenes, C., & Findell, C. (1999). Developing Students' Algebraic Reasoning Ability. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 127-137). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Lesh, R. Behr, M., & Post , T. (1988). Proportional Reasoning。In J. Hiebert & M. Behr (Eds), *Number concepts and operations in the middle grades (93-118)*. Reston, VA: NCTM.

Lamon, J.(1993). Ratio and Proportion：Connecting content and Children's Thinking。*Journal for Research Mathematics Education, 24*(1). 41-61.

Lo, J. J., & Watanabe. T. (1997). Development Ratio and Proportion Schemes：A story of a fifth Grader. American Education Research Association.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). The Principles and Standards *for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Noelting, G. (1980a) The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept ： Part I-Differentiation of Stages, Education Studies in Mathematics, 11(2), 217-253.

Noelting, G. (1980b) The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept： Part 1l-Problem Structure at Successive Stage; Problem-Solving Strategies and the Mechanism of Adaptive Restructuring. Education Studies in Mathematics. 11(3), 331-363.

Orton, A. (1992). *Learning mathematic: Issues, theory and class practice*. NY: Villiers, House.

Smith III, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller, & G. Bright(eds.): *Making sense of Fractions, rations, and proportions* (pp. 3-17).

Van de Walle, J. A. (1998). *Elementary and middle school mathematics-Teaching developmentally Third Edition*. Addison Wesley Longman, Inc.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In, R. Lesh & M. Landau (Eds.), A*cquisition of mathematics concepts and process* (pp. 127-174). NY: Academic Press.

An Analysis of Solving a Multiple Proportion Problem: Equal Ratios or Equal Rates

Hsiu-Lan Ma
Department of Business Administration,
Ling Tung University

Abstract

The purpose of this article was to explore and analyze the types while the 6ixth graders solve multiple proportion problems. Especially "equal ratios" or "equal rates" was concerned. In the study, the "c1/(a1×b1)" is an integer when the "c1:(a1×b1)= c2:(a2×b2)" represents the relation of proportion problems. The results from the research showed that some students first considered the way if the problem could be treated as a simple proportion problem and be solved. On the contrary, more students solved it directly from the structure of a multiple proportion problem in the beginning. General solvers applied "unit-rate method" with equal rates. However it was not seen whether they truly understood the meaning of the multiple proportion problems. Some pupils applied "factor-of-change method" with equal ratios. It is paid attention that some students do not know the structure of a multiple proportion problem, or some only have one of equal ratios or equal rates in their mind.

Key words: equal rates, equal ratios, multiple proportion problems